



# Etude rhéologique et simulation numérique de l'injection d'un alliage d'aluminium à l'état semi-solide

Serge Moto Mpong

## ► To cite this version:

Serge Moto Mpong. Etude rhéologique et simulation numérique de l'injection d'un alliage d'aluminium à l'état semi-solide. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002. Français. NNT : . pastel-00001341

**HAL Id: pastel-00001341**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001341>**

Submitted on 6 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>6</b>
1.1	Le cadre industriel . . . . .	6
1.1.1	La mise en forme à l'état solide . . . . .	6
1.1.2	Les procédés de mise en forme à l'état liquide . . . . .	7
1.1.3	Une alternative : la mise en forme à l'état semi-solide . . . . .	8
1.2	Le projet ADFORM et le sujet de thèse . . . . .	9
1.2.1	Objectifs et différents partenaires du projet ADFORM . . . . .	9
1.2.2	Le sujet de thèse . . . . .	9
<b>2</b>	<b>L'ETAT SEMI-SOLIDE</b>	<b>11</b>
2.1	Etat semi-solide obtenu au cours de la solidification . . . . .	12
2.1.1	Brefs rappels sur les mécanismes de formation . . . . .	12
2.1.2	Structures obtenues . . . . .	13
2.2	Refusion partielle . . . . .	17
2.2.1	Globularisation d'un alliage à structure dendritique . . . . .	19
2.2.2	Refusion partielle d'alliages brassés . . . . .	21
2.3	Description du procédé . . . . .	21
2.3.1	Fabrication des lingots <b>thixotropes</b> . . . . .	21
2.3.2	Le principe de l'injection . . . . .	23
2.3.3	Les alliages utilisés . . . . .	23
2.4	Comportement rhéologique des alliages brassés à l'état semi-solide . . . . .	24
2.4.1	Comportement thixotrope . . . . .	25
2.5	Modélisation du comportement des métaux à l'état semi-solide . . . . .	27
2.5.1	Modèles de type fluide : théorie des suspensions et fluides non newtoniens . . . . .	27
2.5.2	Les modèles viscoplastiques . . . . .	33
2.5.3	Lois basées sur les modèles biphasés . . . . .	34
2.5.4	Conclusion : cas des alliages globulaires à fraction de solide $f_s \simeq 0.5$ . . . . .	36
<b>3</b>	<b>CARACTERISATION RHEOLOGIQUE</b>	<b>38</b>
3.1	Rappel bibliographique sur les expériences faites pour décrire l'écoulement des métaux à l'état semi-solide . . . . .	38
3.1.1	Ecoulement sous gravité . . . . .	39

3.1.2	Cisaillement dans les rhéomètres de couette . . . . .	39
3.1.3	Compression simple entre plateaux parallèles . . . . .	39
3.1.4	Indentation . . . . .	39
3.1.5	Filage arrière . . . . .	40
3.1.6	Conclusion . . . . .	41
3.2	Description de l'essai développé dans le cadre de ce travail . . . . .	41
3.2.1	Le test de l'écoulement de Stefan . . . . .	41
3.2.2	Les paramètres du procédé . . . . .	42
3.3	Réalisation du montage . . . . .	43
3.3.1	Etapes de conception . . . . .	43
3.3.2	Description des différents organes . . . . .	43
3.4	Expériences de chauffage . . . . .	46
3.4.1	But . . . . .	46
3.4.2	Montage . . . . .	46
3.4.3	Résultats . . . . .	47
3.4.4	Comparaison qualitative avec des simulation Forge2 . . . . .	49
3.4.5	Conclusion . . . . .	50
3.5	Expériences d'injection . . . . .	50
3.5.1	Conditions expérimentales . . . . .	50
3.5.2	Les pièces injectées . . . . .	50
3.5.3	Microstructure des pièces injectées . . . . .	51
3.5.4	Analyse des courbes d'injection . . . . .	53
3.6	Identification des paramètres rhéologiques . . . . .	56
3.6.1	Evolution des paramètres viscoplastiques dans l'intervalle de solidification . . . . .	56
3.6.2	Simulation numérique de l'expérience . . . . .	57
3.6.3	Détermination des paramètres rhéologiques de la loi . . . . .	61
3.7	Conclusion . . . . .	63
<b>4</b>	<b>FORMULATION LAGRANGIENNE POUR LE REMPLISSAGE</b>	<b>66</b>
4.1	Le modèle lagrangien . . . . .	66
4.2	Equations d'équilibre . . . . .	66
4.2.1	Equation de conservation de la masse . . . . .	67
4.2.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	67
4.2.3	Le problème continu à résoudre . . . . .	67
4.2.4	Conditions aux limites . . . . .	68
4.3	Discretisation temporelle . . . . .	69
4.4	Discretisation spatiale par la méthode des éléments finis . . . . .	70
4.4.1	Formulation variationnelle . . . . .	70
4.4.2	Formulation mixte avec le mini-élément . . . . .	71
4.5	La tension superficielle . . . . .	74
4.5.1	Adhésion à la paroi . . . . .	76
4.5.2	Application : équilibre d'une goutte sur une paroi plane . . .	78
4.6	Le remaillage automatique . . . . .	78

4.7	Application à la simulation de l'injection thixotrope . . . . .	80
4.8	Conclusion . . . . .	80
<b>5</b>	<b>LE CONTACT DANS R3</b>	<b>83</b>
5.1	Généralités sur le contact . . . . .	83
5.2	Conditions de contact . . . . .	83
5.2.1	Le cas quasi-stationnaire . . . . .	83
5.2.2	Le contact incrémental . . . . .	85
5.3	Méthodes utilisées pour appliquer la condition de contact à l'interface	87
5.3.1	La méthode maître/esclave standard . . . . .	87
5.3.2	La méthode maître/exclave symétrique . . . . .	87
5.4	Méthodes numériques pour résoudre le problème d'optimisation avec contrainte créé par l'application de la condition de contact à l'interface	88
5.4.1	Méthode de reprojexion de la frontière . . . . .	88
5.4.2	La méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	88
5.4.3	La méthode du Lagrangien perturbé . . . . .	89
5.4.4	La méthode de pénalisation . . . . .	89
5.4.5	La méthode du Lagrangien augmenté . . . . .	90
5.4.6	Conclusion . . . . .	90
5.5	Le contact matière/matière et matière/outil dans R3 . . . . .	91
5.5.1	Comportement d'un matériau viscoplastique . . . . .	91
5.5.2	Conditions aux limites . . . . .	92
5.5.3	Formulation variationnelle du problème continu . . . . .	93
5.5.4	Discrétisation . . . . .	94
5.6	Ajout du contact matière-matière dans R3 par une méthode de pénalisation	95
5.6.1	Contact bilatéral . . . . .	95
5.6.2	Contact unilatéral . . . . .	97
5.7	Préconditionnement du contact matière/matière . . . . .	99
5.7.1	Mise en évidence des problèmes de conditionnement de la matrice . . . . .	99
5.7.2	Orthonormalisation de Gram-Schmit . . . . .	100
5.7.3	Factorisation incomplète de Crout . . . . .	103
5.8	Application . . . . .	105
5.9	Conclusion . . . . .	106
<b>6</b>	<b>FORMULATION ARBITRAIREMENT EULERIENNE-LAGRANGIENNE</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	107
6.2	Généralités sur la formulation arbitrairement eulérienne lagrangienne	107
6.2.1	Formulation mathématique de l'ALE . . . . .	108
6.2.2	ALE et adaptativité de maillage . . . . .	109
6.3	Détermination de la vitesse de maillage . . . . .	110
6.3.1	Régularisation de maillage : le barycentrage . . . . .	111
6.3.2	Régularisation en surface libre . . . . .	111

6.3.3	Autre méthode de détermination de la vitesse de maillage : méthode de type Laplacien . . . . .	112
6.3.4	Conditions aux limites . . . . .	112
6.4	Le transport des variables d'état . . . . .	114
6.5	Les normales consistantes . . . . .	115
6.6	Le maillage par boîtes et le raffinement du front de matière . . . . .	117
6.7	Conclusion . . . . .	119
<b>7</b>	<b>FORMULATION EULERIENNE POUR LE REMPLISSAGE</b>	<b>120</b>
7.1	Introduction . . . . .	120
7.2	Suivi de surface libre en formulation eulérienne . . . . .	120
7.2.1	Méthodes de suivi de surface ou de marqueurs . . . . .	120
7.2.2	Méthodes de suivi de volume . . . . .	121
7.3	Présentation du code de calcul Rem3D . . . . .	121
7.3.1	Résolution de l'équation de transport de la fonction caractéristique par la méthode de Galerkin discontinue . . . . .	122
7.3.2	Résolution des équations mécaniques d'équilibre . . . . .	125
7.4	Introduction des termes d'inertie . . . . .	127
7.5	Simulation de l'injection de pièces industrielles . . . . .	129
7.5.1	Simulation du remplissage du SIMULACRO . . . . .	129
7.5.2	Remplissage de la pièce EADS . . . . .	132
<b>8</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>137</b>
8.1	Les acquis du travail . . . . .	137
8.2	Perspectives . . . . .	139
8.2.1	Caractérisation de la rhéologie . . . . .	139
8.2.2	Amélioration de la simulation numérique du procédé . . . . .	140
8.2.3	Exploitation de la simulation pour optimiser le procédé . . . . .	140

## Nomenclature

### – Lettres grecques :

$\eta$	: viscosité apparante de la gélée
$\eta_l$	: viscosité apparante de l'alliage à l'état liquide
$\dot{\gamma}$	: vitesse de cisaillement
$\nabla F$	: gradient de la fonction $F$
$\nabla \cdot X$	: divergence de la fonction $X$
$\rho_s$	: masse volumique de l'alliage à l'état solide
$\rho_l$	: masse volumique de l'alliage en fusion
$\sigma$	: tenseur des contraintes
$\dot{\epsilon}$	: tenseur des vitesses de déformation
$\dot{\bar{\epsilon}}$	: vitesse de déformation équivalente
$\tau$	: contrainte de cisaillement

### – Lettres latines :

$A$	: coefficient d'une loi dépendant de la fraction de solide ou de la structure
$B$	: coefficient d'une loi dépendant de la fraction de solide
$C$	: vitesse moyenne de refroidissement
$C_0$	: composition initiale de l'alliage
$C_l$	: concentration du soluté dans le liquide
$C_s$	: concentration du soluté dans le solide
$D_l$	: coefficient de diffusion des atomes du soluté dans le liquide
$H$	: chaleur latente de fusion
$I_1$	: premier invariant
$J_2$	: second invariant
$S$	: tenseur déviateur des contraintes
$T$	: température de l'alliage
$T_f$	: température de fusion du soluté pur
$T_L$	: température du liquidus
$S$	: tenseur déviateur des contraintes
$d$	: espacement interdendritique
$f_l$	: fraction massique de liquide
$f_s$	: fraction massique de solide
$f_s^*$	: fraction solide critique ; dépend de $\dot{\gamma}$ et de la vitesse de refroidissement
$k$	: coefficient de partage ( $= \frac{C_s}{C_l}$ )
$kp$	: composition du solide se formant à l'interface solide/liquide
$m_L$	: pente du liquidus
$s$	: variable d'agglomération de la structure
$t_c$	: temps critique de l'évolution de la structure dendritique
$v$	: vitesse du matériau homogène
$v_l$	: vitesse de la phase liquide
$v_s$	: vitesse des particules solides

# Chapitre 1

## INTRODUCTION

La conjoncture économique actuelle, marquée par une augmentation des charges des entreprises, due entre autre à l'augmentation du coût de la main d'oeuvre, à la diminution du temps de travail, à la hausse des cours de matières premières (aluminium par exemple), et à la concurrence des pays du sud pousse les industriels de la mise en forme des métaux à réduire leur coût de production et à augmenter leur productivité. D'autre part, dans certains secteurs comme l'aéronautique par exemple, on a besoin de pièces de très hautes caractéristiques. Dans l'industrie automobile, la tendance est à l'allègement des véhicules en vue de consommer peu et de polluer moins. Plus simplement, les entreprises ont besoin de produire des pièces plus légères, de meilleure qualité et moins chères. Les procédés classiques utilisés pour la fabrication de pièces sont la mise en forme à froid et la mise en forme à chaud.

### 1.1 Le cadre industriel

#### 1.1.1 La mise en forme à l'état solide

Les procédés de mise en forme à l'état solide, qui regroupent entre autres le forgeage à froid, le forgeage à chaud, le laminage, le filage et des techniques d'usinage, sont très utilisés car les pièces obtenues sont de meilleure qualité mécanique et métallurgique que celles obtenues par les procédés de mise en forme à l'état liquide. Elles présentent ainsi des qualités de tenue en fatigue et de résistance aux chocs bien meilleures. Toutefois, on note que pour des pièces complexes, les coûts de fabrication peuvent être très élevés. La conséquence est alors l'utilisation de ces procédés pour des pièces de sécurité pour lesquelles les critères de qualité sont très sévères. Le principal débouché pour ces produits est l'industrie automobile avec plus de la moitié de la production. Les autres secteurs consommateurs de pièces issues de la mise en forme à l'état solide sont l'aéronautique, les industries ferroviaire et militaire, les industries de fabrication de motos et de cyclomoteurs. Les matériaux utilisés sont très divers : aciers et autres alliages métalliques. La souplesse de production est considérable car on peut obtenir des pièces de quelques grammes à plusieurs tonnes. Les cadences de fabrication peuvent être très élevées. En conclusion, les différentes techniques de mise en forme à l'état solide permettent

l'obtention de pièces ayant une très bonne qualité mécanique et métallurgique, mais de forme généralement simple.

### 1.1.2 Les procédés de mise en forme à l'état liquide

Ce sont des procédés de mise en forme de métaux consistant à verser dans un moule le métal liquide et à l'y maintenir jusqu'à la fin de la solidification, le refroidissement final pouvant s'effectuer hors du moule. Il existe plusieurs façons de classer les procédés de fonderie [28]. En fonction du type d'écoulement, on distingue la coulée par gravité et la coulée sous pression. D'autres classifications sont faites à partir du matériau de constitution du moule (permanent ou à usage unique), à partir du type de matériau coulé, ou à partir du poids des pièces obtenues [17]. Ainsi, on a des moules métalliques ou en sable, qui permettent de fabriquer des pièces en acier, en alliage d'aluminium ou d'autres métaux non ferreux. On présente ci-dessous une comparaison de plusieurs procédés de moulage.

Type de moule	sable à vert	moule permanent (métallique)	moule en sable	moule en carbone	moule en céramique
coût volumique	2	2	4	4	5
coût unitaire	1	4	4	4	3
état de surface	3	2	2	3	1
propriété du matériau	2	2	2	2	3
pièces complexe	3	3	2	2	1
changement de géométrie	1	4	3	3	3

*Légende :*

- 1-très bon
- 5-très mauvais

On constate donc que les différents procédés de coulée permettent d'obtenir des pièces complexes, pouvant présenter des parties très minces et un bon état de surface. Cependant, à cause de la faible viscosité des alliages fondus, on a souvent un écoulement turbulent. Cela entraîne l'apparition de porosités dans les matériaux. L'entraînement de gaz (source de porosité) et de peaux d'oxyde dans la masse du matériau (source d'amorçage de fissures) font que les pièces obtenues ont généralement des qualités mécaniques moyennes. On peut également noter la lenteur du procédé et l'usure rapide des moules, des problèmes de retassure et de



criques sur les pièces formées, dues à la contraction qui se produit au cours de la solidification [17].

### 1.1.3 Une alternative : la mise en forme à l'état semi-solide

Les industries du secteur de la mise en forme, pour rester compétitives, ont besoin de réduire leurs coûts de production. Cette réduction de coût passe entre autre par une réduction du poids des pièces ou par l'utilisation de nouveaux alliages non ferreux sans en altérer la qualité, ou par des économies d'énergie. De même, pour la fabrication de pièces complexes à hautes caractéristiques, ces entreprises ont besoin d'améliorer la qualité des pièces produites par les procédés de fonderie classiques. Aussi, se sont-elles mises à la recherche d'autres procédés pour remplacer la fonderie classique, d'où l'avènement de la mise en forme à l'état semi-solide.

Elle consiste à former les pièces dans l'intervalle de solidification de l'alliage, c'est-à-dire entre le solidus et le liquidus. Aujourd'hui, les techniques de mise en forme à l'état semi-solide sont utilisées aux Etats Unis d'Amérique, en Europe Occidentale (avec quelques variantes en Italie), au Japon et dans d'autres pays d'Asie. On distingue aujourd'hui deux grandes familles de procédés : le rhéoformage qui consiste à mettre directement en forme l'alliage partiellement solidifié sous cisaillement, et le thixoformage. Le thixomolding, quant à lui, consiste à fondre des granulés de metal dans un système vis-fourreau, de manière similaire à l'extrusion des polymères. Le matériau brut est moulé par injection après fusion partielle et imposition d'un cisaillement. En ce qui concerne le thixoformage, on peut diviser ce procédé en trois principales étapes. La première consiste à prendre un alliage ayant un intervalle de solidification assez large comme l'AlSi7Mg et à le produire en billettes par un procédé de coulée continue, dans lequel un brassage électromagnétique a pour effet de casser les structures dendritiques et donc de conférer au produit une structure globulaire. Ensuite, de telles billettes sont réchauffées, le plus souvent en utilisant un chauffage par induction jusqu'à une température entre le solidus et le liquidus, de telle manière que la fraction de solide soit entre 0.5 et 0.6. Les globules gardent alors une certaine cohérence et le produit peut être manipulé facilement. Enfin, la billette réchauffée est mise en forme dans un moule et on obtient la pièce finale. Par rapport aux différentes techniques de fonderie, les principaux avantages de la mise en forme à l'état semi-solide sont :

- une faible consommation d'énergie, car on reste en dessous du point de fusion ;
- des efforts de mise en forme plus faibles que ceux nécessaires à la mise en forme à froid ;
- l'écoulement est laminaire pendant le remplissage, la viscosité de la gelée étant plus élevée que celle du métal en fusion. Le front de matière est relativement plan alors qu'il est en forme de jet dans le cas de la coulée sous pression. Les pièces ainsi fabriquées ont donc de meilleures qualités métallurgiques et mécaniques, ce qui permet de remplir les moules plus facilement en limitant la création de porosités. On note également de meilleures tolérances dimensionnelles (moins de retraits) et peu de défauts de surface, ce qui permet de

- réduire (voire d'éliminer) des opérations d'usinage ;
- une plus grande durée de vie des outils, car les chocs thermiques y sont moindres et le temps de solidification plus court ; une conséquence est donc l'augmentation de la cadence du procédé.
- La possibilité d'incorporer facilement d'autres matériaux (fabrication de composites), d'utiliser les outils de mise en forme propres au forgeage à chaud (extrusion, forgeage, ...), ou de séparer le liquide du solide (filtration) ;

En résumé, la mise en forme de métaux à l'état semi-solide permet d'obtenir des pièces ayant des propriétés mécaniques intermédiaires entre la fonderie et le forgeage de façon plus économique que ces procédés.

## 1.2 Le projet ADFORM et le sujet de thèse

### 1.2.1 Objectifs et différents partenaires du projet ADFORM

Le CEMEF, à travers les travaux de Jean Collot et des différents chercheurs qu'il a encadrés, a participé grandement à la mise au point des différents paramètres du procédé[25] et à son industrialisation par l'intermédiaire de plusieurs brevets déposés[27]. Il s'est attaché tout particulièrement au développement technologique de nouveaux procédés de thixoformage. Aussi, c'est fort de ces résultats que le centre de recherche s'est lancé dans un nouveau projet européen Brite/Euram dans lequel s'inscrit ce travail et dont le titre est "Advanced Semisolid Forming for Complex structural components" (ADFORM). Le but de ce projet est de remplacer certaines pièces d'alliage ferreux des industries automobile et de l'aéronautique par des pièces en alliage d'aluminium et de contribuer ainsi à l'allègement des véhicules et à la diminution de la pollution. Les partenaires de ce projet sont les suivants :

- FIAT (Italie), constructeur automobile
- STAMPAL (Italie), fonderie sous pression
- RENAULT (France), constructeur automobile
- EADS (France), constructeur aéronautique
- DERBI-MOTORS (Espagne), constructeur de cyclomoteurs
- UPC (Espagne), Université polytechnique de Barcelone

Pour atteindre ces objectifs, des injections de pièces industrielles ont été faites par le partenaire STAMPAL. Des tests mécaniques sur ces pièces ont également été effectués chez les partenaires FIAT, RENAULT, et EADS, et des analyses de microstructure ont été effectuées à l'UPC. Enfin, des simulations numériques et des expériences ont été effectuées au CEMEF.

### 1.2.2 Le sujet de thèse

Plusieurs chercheurs depuis Spencer [115] se sont penchés sur le comportement des alliages à l'état semi-solide. Cependant, très peu de travaux ont été réalisés dans les conditions d'injection. Aussi, ma thèse, dont le but est de permettre la simulation

numérique du procédé d'injection de métaux à l'état semi-solide, fait partie des projets de recherche lancés au CEMEF et dont le but est d'améliorer les moyens de la simulation des procédés de fonderie. La première partie de notre travail a donc été, après le choix d'un modèle, de concevoir un test rhéologique capable de représenter au mieux les conditions d'injection. Ensuite, nous avons procédé à l'identification des paramètres du modèle rhéologique. Connaissant donc le comportement de notre alliage, nous avons procédé aux adaptations nécessaires de nos codes de calcul en vue de procéder à la simulation numérique du remplissage concernant les métaux à l'état semi-solide et à la validation des simulations sur les expériences.

Aussi, après un deuxième chapitre consacré à une revue bibliographique sur le procédé et les modèles utilisés pour décrire le comportement des métaux à l'état semi-solide, nous présentons au troisième chapitre les résultats des expériences d'injection que nous avons réalisées, ainsi que ceux de l'identification des paramètres du modèle caractérisant le comportement du matériau au cours de la phase d'injection. Le quatrième chapitre est consacré à la présentation du premier code de calcul que nous avons utilisé, R3. Le cinquième chapitre est quant à lui consacré au traitement numérique du contact matière/matière dans R3 et le sixième à la formulation arbitrairement lagrangienne eulérienne dans R3. Le dernier chapitre, quant à lui présente le code de calcul Rem3D et les développements que nous y avons faits, ainsi que les principaux résultats obtenus en remplissage de pièces industrielles.

## Chapitre 2

# L'ETAT SEMI-SOLIDE

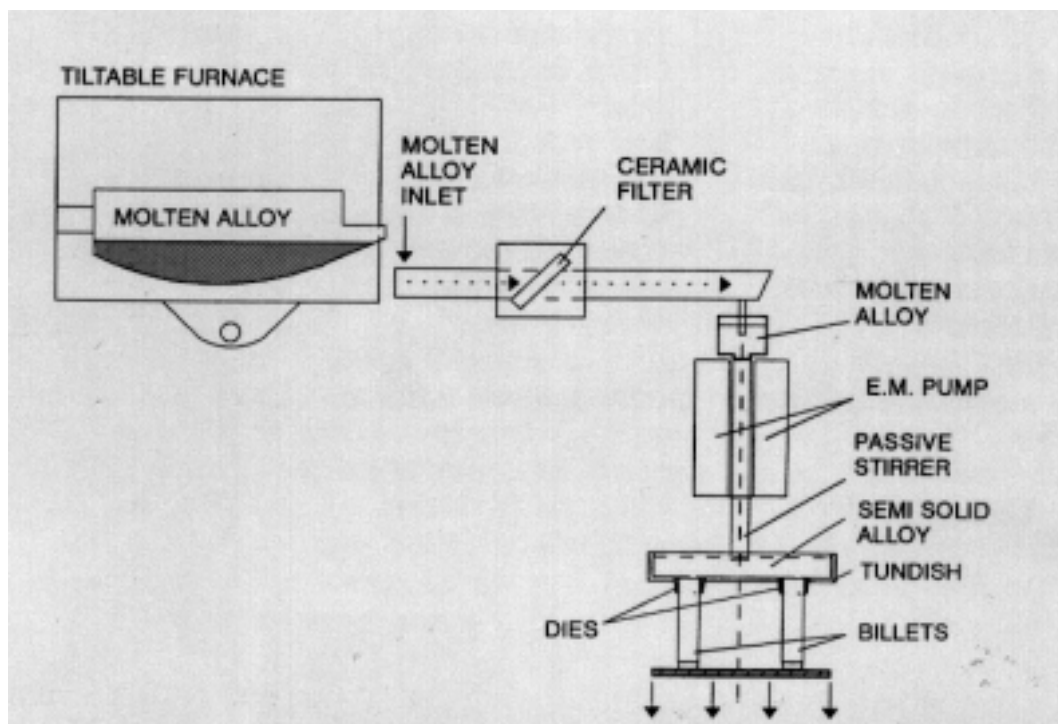


FIG. 2.1 – Procédé de fabrication de billettes à structure globulaire pour le thixo-formage

Ce chapitre a pour but de présenter les principales avancées sur la mise en forme à l'état semi-solide (Figure : 2.1), depuis la découverte par Spencer de la structure globulaire[115]. On s'intéressera donc aux différents états structuraux des alliages à l'état semi-solide, leurs comportements rhéologiques et les principaux paramètres dont ils dépendent, ainsi que les différents modèles utilisés dans la bibliographie pour décrire leur comportement. On verra donc que la rhéologie dépend très fortement de la morphologie de la phase solide. La forme et la structure de la phase solide dépend quant à elle du processus d'obtention de l'état semi-solide. Dans la première partie, nous présentons les différents procédés d'obtention de l'état semi-solide et les structures obtenues. On distingue alors deux principaux procédés de solidification :

- une solidification conventionnelle conduisant à la formation d’une structure dendritique pour la phase solide,
- une solidification avec brassage conduisant à la formation d’une structure globulaire pour la phase solide.

On présente aussi la refusion partielle d’alliages préalablement solidifiés avec ces deux procédés.

Dans la seconde partie, nous présentons les modèles de comportement permettant de décrire l’écoulement des alliages à structure globulaire, puisque ce sont ceux-là qui sont utilisés pour la mise en forme.

## 2.1 Etat semi-solide obtenu au cours de la solidification

### 2.1.1 Brefs rappels sur les mécanismes de formation

L’état semi-solide est obtenu à partir de l’état liquide par germination de particules solides et par croissance des germes créés au cours de la solidification [43]. La formation d’un germe dans un bain liquide nécessite une énergie d’activation égale à la variation d’énergie libre du système. Cette énergie est fonction de l’entropie de fusion, de la surfusion thermique (différence entre la température de fusion et la température d’équilibre du germe), et de l’énergie superficielle du germe créé. La courbe d’évolution de l’énergie libre d’un germe en fonction de son rayon montre l’existence d’un maximum pour un rayon critique. Tout embryon dont le germe a un rayon inférieur à cette valeur ne peut se développer car sa croissance occasionne une augmentation de l’énergie libre, alors que pour un germe dont le rayon est supérieur au rayon critique, on a un bilan énergétique favorable à l’augmentation de son rayon. C’est le processus de germination homogène au cours duquel les particules solides se forment au sein de la phase liquide dans les conditions d’équilibre thermodynamique. Ce processus de germination suppose l’équiprobabilité de naissance d’un germe en tout point de la phase mère.

On distingue également la germination hétérogène au cours de laquelle les germes se forment au contact des parois froides de la lingotière ou de particules étrangères baignant dans le liquide (oxydes par exemple). Ces dernières abaissent l’enthalpie libre de formation des germes ainsi que le degré de surfusion nécessaire pour amorcer la réaction. Les germes ainsi créés, s’ils sont stables, sont susceptibles de grossir pour donner un cristal.

Lors de la phase de croissance, les cristaux adoptent plusieurs morphologies en fonction des conditions thermiques de la solidification et la composition du liquide au voisinage de l’interface liquide/solide.

La surfusion chimique est la différence entre le gradient de température imposé à l’interface solide/liquide par les conditions thermiques de la solidification et le gradient de température du liquidus induit par la différence de concentration en soluté près de l’interface. Lorsque la surfusion chimique est importante dans une

zone, on a une vitesse de croissance plus importante et donc, une certaine instabilité. Cette instabilité entraîne la formation d'une structure de type dendritique.

Lorsqu'on a une surfusion chimique faible, on a une solidification de type cellulaire. L'avancée du front de solidification dans ce cas conduit à la formation de perturbations qui croissent selon le même mécanisme que celui qui leur a donné naissance. Enfin, lorsqu'il n'y a pas de surfusion chimique, la zone considérée est stable et l'on observe une solidification plane. La surfusion de courbure, quant à elle, est la surfusion thermique existant en bout de dendrite et due à la courbure locale.

La morphologie de la partie solide obtenue après croissance des germes créés est influencée par la vitesse de solidification et les éventuels traitements mécaniques et électromagnétiques appliqués à l'alliage se solidifiant.

## 2.1.2 Structures obtenues

### Microstructure au cours d'une solidification conventionnelle

Au cours d'une solidification conventionnelle, la microstructure obtenue dépend essentiellement de la composition chimique de l'alliage et des conditions de refroidissement. En fonction de la composition de l'alliage, on obtient soit une structure dendritique, soit une structure eutectique. En fonction des conditions de refroidissement, on obtient soit une structure dendritique équiaxe, soit une structure dendritique basaltique. Les microstructures dendritiques sont obtenues par croissance de la phase solide dans le liquide alors que les microstructures eutectiques sont le résultat de la croissance couplée des deux phases dans un liquide de composition eutectique. Toutefois, la plupart des alliages d'importance commerciale ont une solidification dendritique. En effet lorsque le gradient thermique imposé au front solide-liquide par le refroidissement est inférieur au gradient de la température du liquidus, on a l'instabilité du front de solidification et la formation d'une structure dendritique. En général, cette structure, à l'exception de la structure dendritique fine, n'est pas très intéressante pour la mise en forme car elle cause des problèmes d'hétérogénéité de la déformation (ségrégation dans la phase à l'état semi-solide) et de formation de fissures à chaud [44][96].

Pour caractériser une telle structure, on mesure les espaces entre les dendrites primaires, secondaires ou d'ordre supérieur, généralement perpendiculairement aux branches. La finesse du réseau dendritique d'un alliage dépend de la vitesse de solidification. On a la relation empirique suivante :

$$d = a \left( \frac{dT}{dt} \right)_{\text{moy}}^{-n}$$

avec

$d$  : espacement interdendritique primaire ou secondaire,

$a$  et  $n$  constantes,

$\left( \frac{dT}{dt} \right)_{\text{moy}}^{-n}$  vitesse de refroidissement moyenne au cours de la solidification.

La connaissance du diagramme d'équilibre d'un alliage binaire au cours de la solidification permet de déterminer entièrement les compositions des phases liquide  $C_l$  et solide  $C_s$ , ainsi que leur répartition massique, par application du principe de conservation du soluté. Les effets de courbure en bout de dendrites et de convection dans le liquide sont généralement négligés, ce qui suppose un équilibre total du soluté dans le liquide et dans le solide. Les fractions massiques de liquide et de solide sont déduites par la règle barycentrique :

$$C_s f_s + C_l f_l = C_0$$

où  $C_0$  est la composition initiale. Si de plus on néglige la diffusion du solide et on suppose une homogénéisation complète dans le liquide, la fraction de solide peut être écrite en tout point en utilisant l'équation de Scheil [79] :

$$f_s = 1 - \left( \frac{C_l}{C_0} \right)^{\frac{-1}{1-k_p}}$$

$k_p = \frac{C_s^*}{C_l^*}$ ,  $C_s^*$  étant la composition du solide qui se forme à l'interface solide liquide. En fonction de la température du liquide, on a, moyennant une hypothèse de linéarité de la température de début de solidification en fonction de la concentration[43] :

$$f_s = 1 - \left( \frac{T_f - T}{T_f - T_L} \right)^{\frac{-1}{1-k_p}}$$

$T$  : la température de l'alliage se solidifiant

$T_L$  : la température de liquidus de l'alliage (début de solidification)

$T_f$  : la température de fusion du corps pur

## Solidification avec brassage

Nous avons noté au paragraphe précédent que les porosités et les ségrégations observables en fonderie sont généralement dues à la structure dendritique. Aussi, plusieurs travaux ont été réalisés notamment au MIT pour modifier cette structure au cours de la mise en forme. Ainsi, le brassage mécanique d'un alliage à l'état semi-solide détruit la structure dendritique au profit d'une structure globulaire (figure 2.2). Les études métallographiques réalisées après solidification complète révèlent la présence de globules issues de la solidification primaire dans une matrice résultant elle de la solidification secondaire du liquide existant au moment de la coulée. Cette découverte a été faite au début des années soixante-dix(1971) par David Spencer au MIT qui, tout au long de la solidification de l'alliage Sn-15%Pb dans un rhéomètre de Couette, imposa un cisaillement important (figure 2.3). Il observa en outre que pour une fraction de solide donnée, la contrainte de cisaillement pour cette nouvelle structure était de deux ordres de grandeur plus faible que celle du même matériau à structure dendritique pour une fraction de solide donnée [43].

On peut donc obtenir cette structure par un brassage mécanique de l'alliage à température constante. On distingue deux types de brassage mécanique : des systèmes monocharges ou continus, selon que la production se fait à partir d'une



FIG. 2.2 – Evolution de la structure durant la solidification avec cisaillement[44]

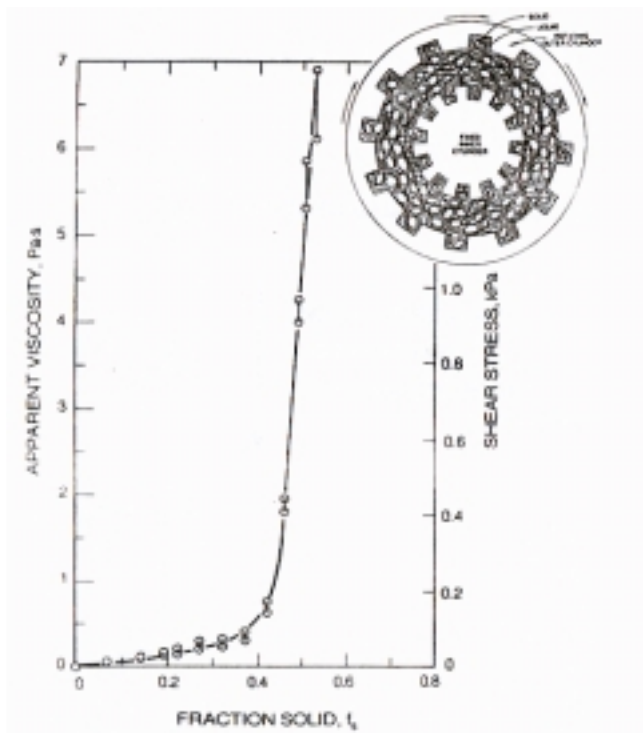


FIG. 2.3 – Expérience de Spencer : détermination expérimentale de la contrainte de cisaillement pour l'alliage Sn-Pb[44]



charge élémentaire placée dans un creuset ou en continu. Toutefois, les limitations de ces systèmes sont dues aux régulations de température, à la présence et à l'usure de l'agitateur au contact du métal liquide. C'est pourquoi on emploie de plus en plus un brassage électromagnétique continu au cours de la solidification (cf figure 2.1) pour obtenir cette structure (figure 2.4). Différents systèmes ont été brevetés, notamment pour le brassage des barres de diamètre variant de 5 à 150 mm, ce qui permet ainsi d'obtenir, après tronçonnage, des préformes destinées à la mise en forme.

En revanche, plusieurs auteurs depuis Spencer se sont intéressés au mécanisme de formation d'une structure globulaire. Pour les chercheurs des universités de Drexel [3][81][127] et ceux de Sussex [34], on a d'abord une solidification dendritique ; le brassage tendant à favoriser l'instabilité de la croissance dendritique et à augmenter la vitesse de croissance pour une instabilité déjà établie. Les particules globulaires proviennent alors de la fragmentation des bras de dendrites. Les joints de grains de faible énergie ne présentant pas de pic de soluté proviennent alors de la déformation à chaud de bras de dendrite, alors que ceux présentant un pic de soluté proviennent du frittage de deux particules solides qui se sont rencontrées avec une orientation favorable pour la création d'un joint de grains non mouillé.

Pour ceux de l'université de Delft [92][114], qui ont étudié l'effet de la convection et la diffusion des atomes de soluté au voisinage d'une particule sphérique, la globularisation des particules solides serait la conséquence d'une croissance cellulaire due à une surfusion constitutionnelle plus faible que dans le cas d'une solidification classique.

De toute façon, le matériau globulaire se comporte comme un fluide auquel on peut associer une viscosité apparente qui, pour des fractions de solide moyennes ( $f_s \simeq 0.4$ ), reste encore très faible ( $\leq 1 Pa.s$  qui est la viscosité de l'huile d'olive, alors qu'on a à l'état purement liquide  $\eta \simeq 10^{-3} Pa.s$ )[44].

Une agitation vigoureuse au début de la solidification provoque la formation de nouveaux grains (germination). En effet, les dendrites, soumises à un cisaillement important au cours d'un refroidissement suffisamment lent, prennent une forme sphéroïdale. Joly montra que la taille des grains individuels dépend fortement de la vitesse de solidification et faiblement de la vitesse du cisaillement[44].

Il apparaît donc que la formation d'une structure non dendritique se fait soit par fragmentation de dendrites initialement formées sous l'action d'un cisaillement important, soit à cause d'un gradient thermique légèrement négatif à l'interface solide-liquide, provoquant une surfusion constitutionnelle plus faible que dans le cas d'une solidification classique [88].

Les paramètres la caractérisant sont la taille, le nombre et la morphologie, la fraction volumique de liquide piégé à l'intérieur des particules, ainsi que l'espacement entre les particules. Pour un alliage donné, les paramètres opératoires conditionnant fortement les caractéristiques de cette structure sont[43][44] :

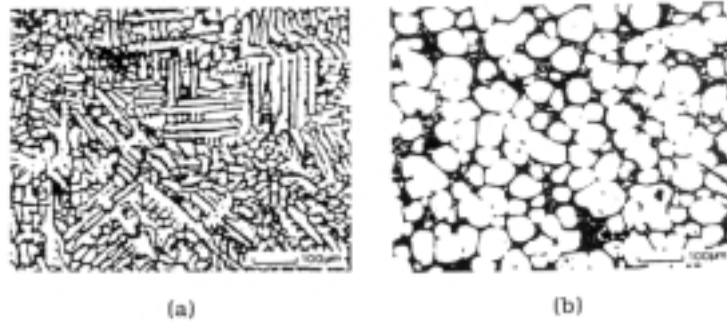


FIG. 2.4 – Microstructure d'un alliage Sn-Pb obtenu par une solidification conventionnelle (a) et par une solidification avec brassage mécanique intense (b)[82]

- la vitesse de refroidissement,
- la vitesse de cisaillement de l'alliage au cours du brassage,
- la fraction de solide en fonction de la température de fin de brassage ou de brassage isotherme,
- le temps de brassage.

## 2.2 Refusion partielle

Dans le précédent paragraphe, nous avons présenté deux manières d'obtenir l'état semi-solide qui consistent, en partant de l'état liquide, à refroidir l'alliage jusqu'à une température située dans son intervalle de solidification. Les caractéristiques structurales de l'alliage ainsi obtenu sont alors déterminées par la vitesse et les conditions de refroidissement, ainsi que par la température et le temps de maintien. La refusion partielle quant à elle est le procédé qui consiste à réchauffer un alliage métallique préalablement solidifié jusqu'à une température supérieure à celle du solidus. Les propriétés microstructurales de l'état semi-solide obtenu sont alors déterminées par[44] :

- la nature de l'alliage (présence ou non de particules céramiques)
- les conditions de solidification (vitesse,...) (figure 2.5) qui déterminent la taille et la morphologie de la structure avant refusion
- les traitements thermomécaniques appliqués à l'alliage à l'état solide avant la refusion (écrouissage, recuit, revenu)
- les conditions de refusion (température, vitesse, température et temps de maintien isotherme)(figures 2.7 et 2.6)

Les alliages utilisés dans cette famille de procédés sont généralement issus de la coulée continue conventionnelle ou de la coulée continue avec brassage.

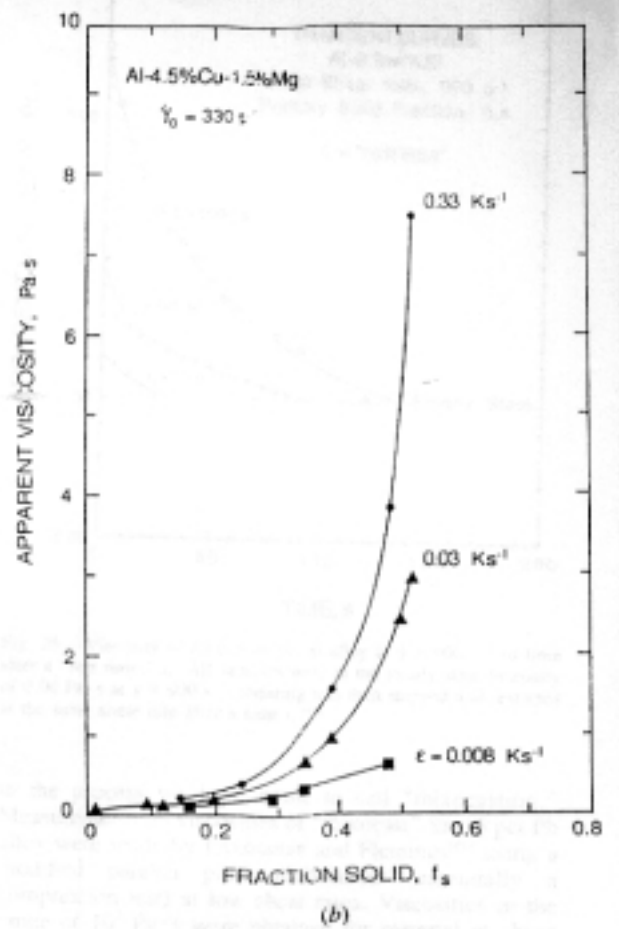
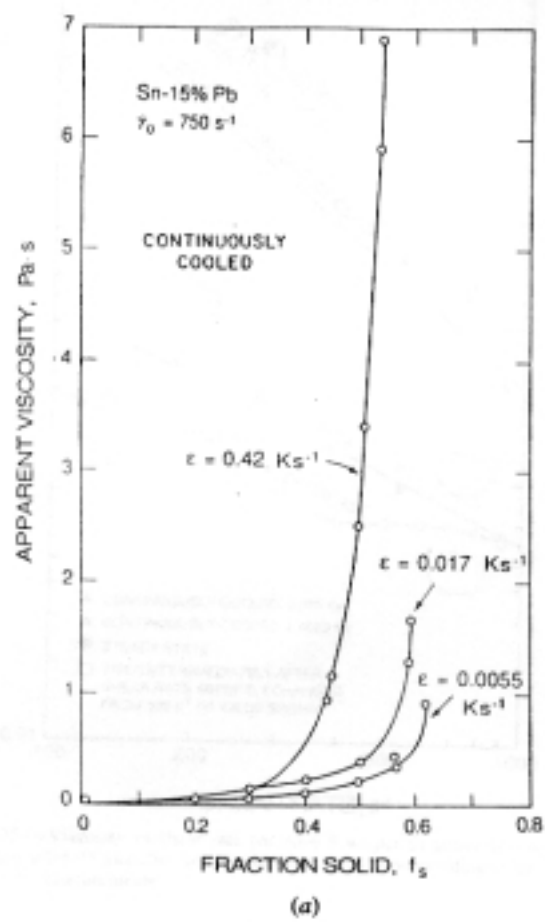


FIG. 2.5 – Effet de la vitesse de solidification sur la viscosité apparente des alliages Sn-Pb(a) et Al-Cu-Mg(b) à l'état semi-solide[44]

### 2.2.1 Globularisation d'un alliage à structure dendritique

En général, pour une structure dendritique fine, l'augmentation du temps de maintien dans l'intervalle de solidification a pour effet de tendre vers une globularisation de la structure. Kattamis[71], puis Secondé et al[109] ont expliqué la formation d'une structure globulaire à partir d'une structure dendritique au cours d'une refusion partielle sans traitement thermomécanique préalable, à partir de deux phénomènes qui sont la redissolution de dendrites fines, et le détachement des branches de dendrites [96]. Kattamis définit le temps critique de l'évolution de la structure dendritique (temps moyen de passage à une structure globulaire par le processus de croissance des dendrites) en fonction des dimensions initiales de la dite structure de la façon suivante [43] :

$$t_c = -\frac{\rho_s H C_l (1 - k) m_L d^3}{\sigma T_L D_l}$$

avec :

$H$	: <i>chaleur latente de fusion</i>
$d$	: <i>espacement interdendritique</i>
$\sigma$	: <i>énergie d'interface solide-liquide</i>
$T_L$	: <i>température du liquidus</i>
$m_L$	: <i>pente du liquidus</i>
$C_l$	: <i>concentration dans le liquide</i>
$D_l$	: <i>coefficient de diffusion dans le liquide</i>

Secondé et al[109][110] ont montré que les principales étapes de la globularisation d'une structure dendritique fine sont : la fusion des petits bras de dendrites et l'obtention de globules dont la taille est caractéristique de la taille initiale des bras de la structure dendritique initiale, le grossissement et la coalescence entre les globules et, enfin, la globularisation finale. De même, Nguyen[95] et Loué[82] ont travaillé sur le même sujet. Le premier, à partir des alliages AS7G03 et Sn-Pb solidifiés rapidement dans un moule chaud, puis réchauffés et maintenus à la température de réchauffage assez longuement (30 minutes pour l'AS7G03 et trois heures pour le Sn-Pb), obtient une structure globulaire (figure 2.6). Il montre que l'application d'une pression au cours de la solidification peut avoir pour conséquence l'accélération de la globularisation. Loué, quant à lui, a montré que l'ajout de particules TiB2 dans un AS7G03 conduit à une globularisation rapide de la microstructure.

En revanche, certains procédés, tels que le SIMA (Strain Induced Melt Activation) par exemple, permettent d'obtenir une structure globulaire par application préalable d'un traitement thermomécanique avant et pendant le réchauffage qui précède la refusion partielle. Le matériau est d'abord soumis à un écrouissage intense lors d'une déformation à froid. Loué a montré qu'un laminage à froid sur l'alliage AS7G06 avec un taux de réduction supérieur à 25% suivi d'un recuit à 580°C permettait d'obtenir une structure globulaire après refusion.

De même, un écrouissage de l'alliage pendant le réchauffage a pour effet d'accélérer la transformation de la structure vers une structure globulaire. Elle provoque en effet une recristallisation de l'alliage et le mouillage de joints de grains. La conséquence

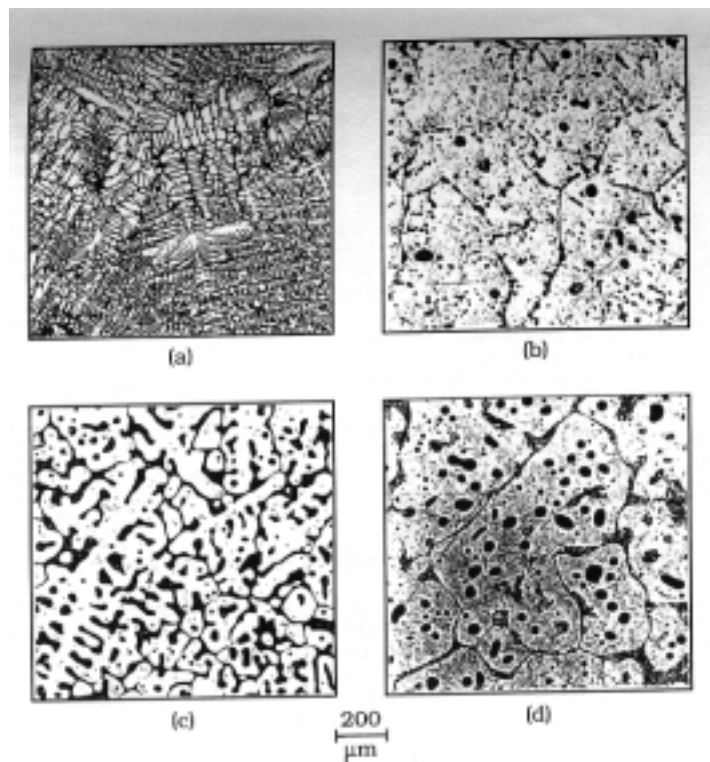


FIG. 2.6 – Evolution de la structure pendant la refusion partielle d'un alliage AS7G06, obtenu par coulée continue conventionnelle, maintenu à  $580^{\circ}\text{C}$  pendant (a) 0 minutes, (b) 1 minute (fin de transformation eutectique binaire), (c) 5 minutes et (d) 30 minutes. Chauffage par immersion dans un bain de plomb durant la solidification avec cisaillement [82]

est la diminution de la taille des globules avec un taux d'écrouissage croissant. L'étude de la globularisation a conduit à plusieurs brevets dont deux portent sur la recristallisation suivie d'un écrouissage avant la globularisation pour diminuer la taille de la microstructure [82].

Au sein du CEMEF, le procédé P.I.D. a été développé [27]. Il est basé sur la globularisation de structures dendritiques fines quand elles sont portées très rapidement par chauffage inductif dans le domaine semi-solide. Le matériau à injecter est obtenu par une solidification conventionnelle. Ensuite, il est réchauffé rapidement jusqu'à l'état semi-solide. Il est ensuite injecté après un temps de maintien court permettant la globularisation de la structure. Deux brevets ont été déposés suite à cette étude.

### 2.2.2 Refusion partielle d'alliages brassés

Loué[82] a montré que lors de la refusion partielle d'un alliage AS7G06 de coulée continue brassée, la structure initiale obtenue est mixte dendritique équiaxe-globulaire. Les globules sont fortement agglomérés et proviennent de la rupture de dendrites primaires sous l'effet de la convection générée par le brassage électromagnétique, comme on l'a observé au cours de la solidification avec brassage. Cette structure initiale évolue rapidement vers une structure globulaire (figure 2.7). L'évolution microstructurale est fortement influencée par les conditions de la refusion partielle : un maintien prolongé dans l'intervalle de solidification entraîne un grossissement des globules. Les études menées sur différents alliages ont montré que le mécanisme dominant cette croissance est le phénomène de coalescence lorsque la fraction de solide est assez importante ( $\geq 0.5$  en volume), alors qu'à des fractions de solide plus faibles, le grossissement s'effectue surtout par croissance des plus gros globules et par diffusion du soluté dans le liquide.

## 2.3 Description du procédé

L'intérêt de la caractérisation rhéologique d'un matériau est la quantification de sa réponse envers un éventail de sollicitations mécaniques auquel il est soumis. Ainsi, elle s'attache à identifier tous les paramètres influençant directement ou indirectement la déformation du matériau. L'équation rhéologique est donc une relation qui relie la contrainte d'écoulement équivalente  $\bar{\sigma}$  aux variables représentatives de la sollicitation au nombre desquels on peut citer la déformation équivalente  $\bar{\epsilon}$ , la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\bar{\epsilon}}$ , et la température  $T$  entre autres.

### 2.3.1 Fabrication des lingots thixotropes

Les lingots d'alliage d'aluminium utilisés pour la mise en forme à l'état semi-solide sont issus d'une solidification suffisamment lente avec brassage dans l'intervalle de solidification. En France, le principal fabricant de tels lingots est Pechiney. On a alors le matériau qui est constitué d'aluminium et de 7% de silicium

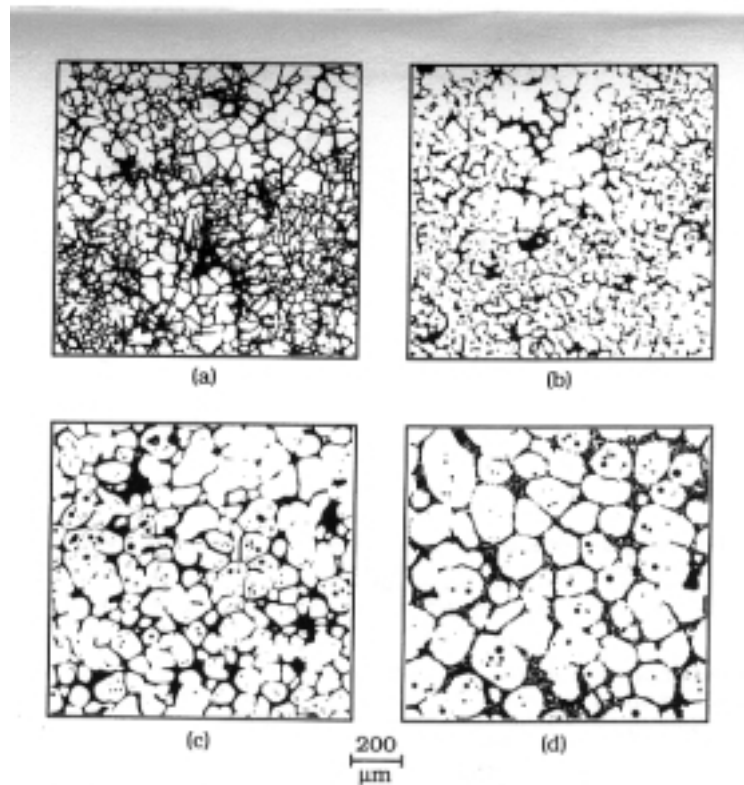


FIG. 2.7 – Evolution de la structure pendant la refusion partielle d'un alliage AS7G06, obtenu par coulée continue brassée électromagnétiquement, maintenu à  $580^{\circ}\text{C}$  pendant (a) 0 minutes, (b) 1 minute (fin de transformation eutectique binaire), (c) 5 minutes et (d) 30 minutes. Chauffage par immersion dans un bain de plomb durant la solidification avec cisaillement[82]

et qui, au cours de sa solidification, est soumis à un brassage électromagnétique intense. le matériau est maintenu suffisamment longtemps isotherme à une certaine température dans son intervalle de solidification. Le temps et la température de maintien conditionnent la transformation des dendrites en globules. Ils sont déterminés et optimisés au cours d'essais incluant des analyses de microstructure. Ce brassage provoque alors la globularisation des dendrites constituant la phase solide. Le matériau est ensuite coupé en lingots et commercialisé.

Les sociétés Amax et Alumax utilisent quant à elle le procédé S.I.M.A. (Strain Induced Melt Activated) dans lequel on obtient une structure corroyée par extrusion des barres qui sont ensuite découpées en lingots. L'alliage d'aluminium est solidifié de manière conventionnelle et a une structure dendritique. Ensuite, pour accélérer la globularisation pendant la refusion partielle, un traitement thermomécanique est appliqué à l'alliage solidifié avant sa refusion partielle. Le matériau subit alors un laminage ou une extrusion à chaud, puis un écrouissage à froid additionnel. Aussi, une fois porté à l'état semi-solide, sa structure évolue rapidement vers une structure globulaire très fine et uniforme.

### 2.3.2 Le principe de l'injection

L'injection à l'état semi-solide est un procédé consistant à introduire un métal préalablement réchauffé dans un moule grâce à la poussée d'un piston. En général, le moule est préchauffé jusqu'à une température de  $220^{\circ}\text{C}$  environ. L'alliage d'aluminium est quant à lui réchauffé jusqu'à une température de  $580^{\circ}\text{C}$  environ et maintenu isotherme pendant environ  $20\text{mn}$ .

### 2.3.3 Les alliages utilisés

En général, les alliages utilisés ont un intervalle de solidification important, ceci permettant d'avoir une plus grande liberté lors de la mise en forme. En fonction de l'élément dominant dans l'alliage, on peut faire la classification suivante [26]

- Alliages à base d'étain :  
Alliages Sn-15%Pb, Sn-Zn, alliage quaternaire de Wood.
- Alliages à base de fer :  
Acier de construction mécanique 100C6, acier rapide norme AISI type M2, Z85WDCDV6542, acier inoxydables AISI 440C et 340, aciers bas carbone AISI 4340, acier inoxydable ferritique 409, acier AISI 1005, 1006.
- Alliages à base de cuivre :  
Cu 11%Sn
- Alliages à base d'aluminium :  
AlSi6.5%, AlSi8.5% (A380), AlSi7Mg0.3Sr (A356+T6 ou AS7G03), AlSi7Mg0.6Sr (A357+T6), Al25%PdSi, AlSi6Cu3Mg+T6, Al4%Cu, Al4.5%Cu.
- Alliages à base de magnésium :  
AZ91D, AZ105 Sn5, AZ95, AM60B, AM50



- Super alliages :  
alliages X-40 et IN100.

## 2.4 Comportement rhéologique des alliages brassés à l'état semi-solide

Dans cette partie nous procédons à une présentation des principales caractéristiques du comportement semi-solide. Les modèles de comportement font l'objet de la partie 2.5. Les premières expériences de Spencer étaient des essais de cisaillement à haute température. Au cours de la solidification d'un alliage Sn-Pb, il appliqua un brassage mécanique intense. Il observa alors que la contrainte d'écoulement n'augmentait que faiblement avec la décroissance de la température en dessous du liquidus.

Joly et Mehrabian[70], à partir des premiers résultats observés par Spencer sur les valeurs des viscosités des alliages à structure globulaire, ont conduit les premières expériences de caractérisation rhéologique sur des alliages brassés à l'état semi-solide. Deux types d'expériences ont alors été réalisées à l'aide des rhéomètres de couette : l'étude de l'évolution de la viscosité apparente (définie ici comme le rapport de la contrainte de cisaillement au taux de cisaillement) d'une part en fonction de la fraction de solide au cours de la solidification et d'autre part en condition isotherme, à fraction de solide donnée, en fonction du taux et du temps de cisaillement. Ces travaux montrent que la viscosité apparente dépend très fortement de la vitesse de cisaillement (figure 2.8), et de la vitesse de solidification (figure 2.5). On observe en effet une décroissance de la viscosité avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement. Une explication possible est que la viscosité dépend de la compétition entre deux phénomènes qui sont les cinétiques d'agglomération et de désagglomération de particules sous l'action du cisaillement. De manière générale, on peut classer le comportement des métaux à l'état semi-solide en fonction de la fraction de solide et du degré de cohésion de la phase solide de la façon suivante :

- Pour de très faibles fractions de solide ( $0 \leq f_s \leq 0.1$ ), le métal se comporte comme un fluide newtonien, ce qui correspond au comportement observé pour des métaux à l'état liquide.
- Pour des fractions de solide faibles ou moyennes ( $0.1 < f_s \leq 0.6$ ) ou lorsque la phase solide a un faible degré de cohésion, le métal se comporte comme un fluide non newtonien avec dépendance vis-à-vis de l'histoire. Cette dépendance par rapport à l'histoire se manifeste de deux manières différentes :
  - un comportement transitoire thixotrope, caractérisé par une diminution réversible de la viscosité apparente avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement. Cette caractéristique nous a intéressé tout particulièrement au cours de la simulation numérique, car les procédés de mise en forme à l'état semi-solide sont si rapides que le régime stationnaire n'est jamais atteint ;
  - un comportement stationnaire isotherme pseudoplastique[70].
- Enfin, pour des fractions de solide élevées,  $0.6 \leq f_s$  ou lorsque la phase solide

a un fort degré de cohésion, les particules solides forment un squelette continu. Le métal se comporte alors comme un matériau viscoplastique poreux saturé de liquide [111][80][96]. La transition entre les deux types de comportement n'étant pas encore modélisée à notre connaissance [93].

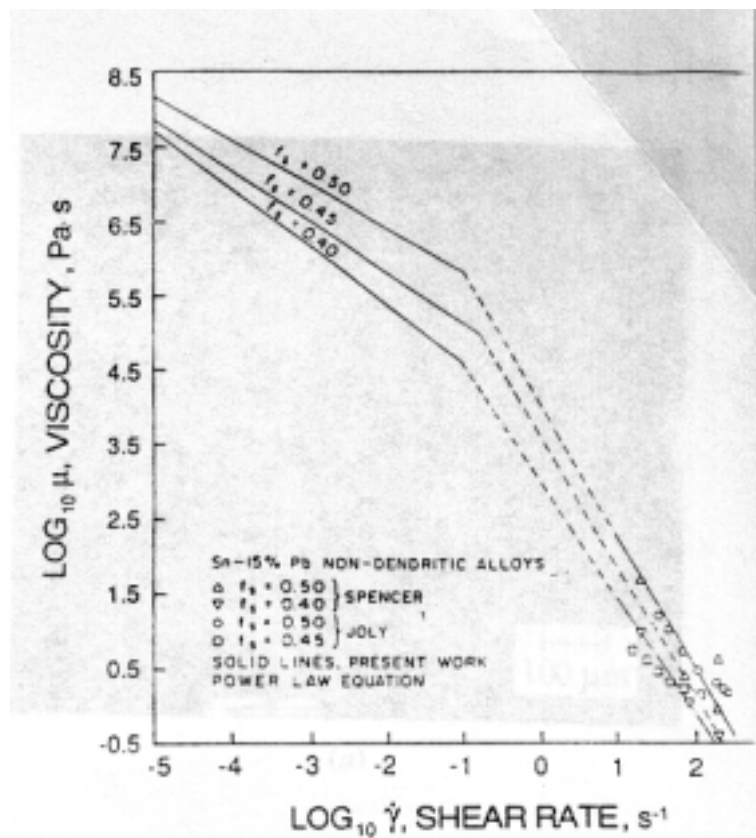


FIG. 2.8 – Evolution de la viscosité apparente en fonction de la vitesse de cisaillement dans l'alliage Sn-Pb[44]

### 2.4.1 Comportement thixotrope

Ce mot a été inventé en 1927 par Peterfi [101] et provient de la juxtaposition des mots grecs *thixis* (agiter, secouer) et *trepo* (changer) dans un article décrivant ce phénomène. Ce terme a ensuite été utilisé pour la première fois pour la description de la viscosité d'un liquide en 1928 par Freundlich qui observa alors que la résistance des solutions colloïdales à l'écoulement décroît lorsque la substance est cisailée ou secouée, et retrouve sa valeur initiale si on arrête le cisaillement. Il appela ce phénomène thixotropie. Depuis lors, beaucoup d'auteurs ont mis en évidence et observé ce phénomène en étudiant d'autres matériaux.

Selon la plupart d'entre eux (Mewis[91], Bauer et Collins [10], Fredrickson[51]), la thixotropie est la propriété caractérisant une substance dont la viscosité apparente est inversement proportionnelle au temps de cisaillement pour une déformation à

vitesse de cisaillement donnée et qui retrouve graduellement son état initial au repos avec hysteresis (voir figure 2.9). De façon plus générale, la thixotropie représente la dépendance par rapport au temps de la rhéologie du matériau, elle caractérise un milieu liquide visqueux et inélastique dont la viscosité varie avec le temps pour des conditions d'écoulement données.

Selon Cheng et Evans [21], la thixotropie est liée au changement de structure de la substance. Au repos, le fluide thixotrope est constitué de particules en interaction entre elles qui forment un réseau ou des agglomérats. Le cisaillement a pour effet de rompre avec le temps les liaisons entre les particules, jusqu'à ce que le degré d'agglomération de la structure atteigne un nouvel état d'équilibre.

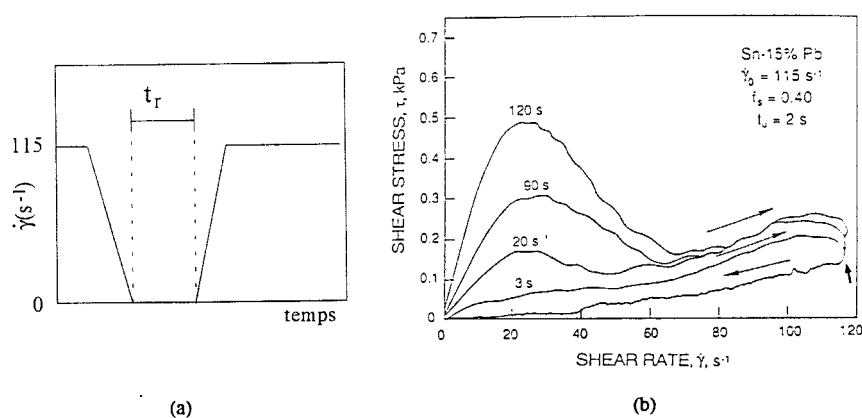


FIG. 2.9 – Thixotropie dans l'alliage  $Sn - 15\%Pb$  brassé [70] : (a) Procédure expérimentale ; l'alliage est soumis à un cisaillement jusqu'à un régime permanent, puis maintenu au repos pendant le temps  $t_r$ , puis de nouveau soumis à un cisaillement ; (b) courbes de contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement pour différents temps de repos. La flèche à l'extrême droite indiquant le point de départ de la boucle, les autres flèches indiquant le sens de parcours.

Pour mesurer la thixotropie de l'alliage  $Sn-15\%Pb$  brassé à l'état semi-solide et ayant une fraction volumique de solide de 0.4, Joly et al [70] mesurèrent l'aire de la courbe d'hysteresis dans un cycle du diagramme donnant la force de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement (figure 2.9). Pour obtenir une boucle d'hysteresis, on augmente la vitesse de cisaillement du régime permanent jusqu'à une valeur maximale, puis on garde le cisaillement constant pendant une période fixe  $\Delta t$ , et finalement on le ramène à zéro à la même vitesse. Une autre façon de mesurer la thixotropie d'un matériau consiste à partir d'un état stationnaire donné et à modifier brusquement la vitesse de cisaillement. On obtient alors un nouvel état permanent dont la viscosité est inférieure à celle de l'état permanent qu'on aurait obtenu avec la même vitesse de cisaillement si on était parti de l'état de repos (avant tout cisaillement), car la structure n'a pas encore eu le temps de s'ajuster à la nouvelle vitesse de cisaillement. La thixotropie est alors mesurée par la différence

entre les courbes de viscosité instantanée et de viscosité du régime permanent. Toutefois, les procédés ci-dessus ne sont pas suffisants pour quantifier les cinétiques d'agglomération et de désagglomération caractérisant la thixotropie des gélées. Les temps d'attente qui suivent un saut de vitesse de cisaillement constituent un moyen approprié pour caractériser la cinétique d'évolution de la structure.

## 2.5 Modélisation du comportement des métaux à l'état semi-solide

Nous avons vu au paragraphe précédent les différents comportements rhéologiques des métaux à l'état semi-solide. Nous avons vu qu'ils sont fortement dépendants de la fraction de solide, du taux de cisaillement appliqué et du temps d'application de ce cisaillement. Pour modéliser ces différents comportements, les auteurs, en fonction du degré de cohésion de la phase solide, utilisent deux grandes catégories de modèles : les modèles issus de l'étude des suspensions lorsque la phase solide a un taux de cohésion assez faible, et des modèles biphasés lorsque la phase solide forme un squelette continu. D'autres auteurs utilisent des modèles viscoplastiques qui, comme on le verra, constituent en fait un cas limite des modèles de type fluide : théorie des suspensions, ou, plus largement, des fluides non newtoniens.

### 2.5.1 Modèles de type fluide : théorie des suspensions et fluides non newtoniens

#### Historique sur l'étude des suspensions

Plusieurs auteurs se sont penchés sur l'étude des suspensions. De manière générale, le comportement d'une suspension dépend de la fraction de solide, de la morphologie et de la taille des particules solides, ainsi que de leur degré d'agglomération. La taille des particules solides dans les suspensions étudiées expérimentalement varie entre 50 et 200  $\mu m$ . Aussi, les forces d'inertie et les déplacements browniens sont négligés pour les vitesses de cisaillement inférieures à 1000  $s^{-1}$ .

Les modèles généralement développés montrent une forte dépendance par rapport à la fraction solide. Pour des fractions de solide inférieures à 0.1, on a des suspensions présentant un comportement newtonien, alors que pour des fractions de solide comprises dans l'intervalle 0.1 – 0.6, on a des suspensions non newtoniennes.

La viscosité, dans le cadre des suspensions newtoniennes, s'écrit comme une fonction polynomiale de degré fini de la fraction solide ou comme une fonction exponentielle de la fraction de solide.

Einstein en 1905 [41] est l'un des premiers à avoir étudié l'hydrodynamique des particules dans une suspension colloïdale. Il exprime alors la viscosité  $\eta$  des suspensions comme une fonction de la fraction de solide  $f_s$  et de la viscosité du liquide pure  $\eta_l$  sous la forme :

$$\eta = \eta_l \left( 1 + \frac{5}{2} f_s \right)$$

Batchelor [7][8][9] étend ce modèle en y ajoutant des termes du second ordre :

$$\eta = \eta_l \left( 1 + \frac{5}{2}f_s + \frac{25}{4}f_s^2 \right)$$

Vand [125] étudie les suspensions de sphères uniformes avec une densité de particule constante dans le milieu et en négligeant les termes d'inertie. Il obtient alors l'expression suivante pour la viscosité  $\eta$  de la suspension :

$$\eta = \eta_l \cdot \exp \left( \frac{2.5f_s + 2.7f_s^2}{1 - 0.609f_s} \right)$$

D'autres modèles ont été développés pour étendre les modèles précédent à des fractions de solide plus élevées. Ce qui a entraîné des modèles de suspension non newtoniens. Ainsi, Thomas généralise le modèle d'Einstein en ajoutant un terme du second ordre en  $f_s$  représentant la rupture de l'écoulement des particules isolées et un terme en exponentielle de  $f_s$  pour modéliser la contribution des doublets à l'énergie dissipée. Ce modèle peut être utilisé jusqu'à des fractions de solide  $f_s = 0.3$ . Frankel et Acrivos [50], toujours avec le souci d'étendre les modèles précédents à des fractions de solide plus élevées ( $f_s \geq 0.35$ ), proposent le modèle suivant :

$$\eta = \eta_l \frac{9}{8} \left[ 1 - \left( \frac{f_s}{f_s^*} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1}$$

Ce dernier modèle est étendu à des sphères 2D par Mori et Ototake :

$$\eta = \eta_l \left[ 1 + \frac{\bar{d}S_v}{2 \left( \frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_s^*} \right)} \right]$$

où  $f_s^*$  est la fraction de solide critique.

## Les principaux modèles développés pour les alliages métalliques brassés

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, un brassage au cours de la solidification d'un alliage métallique supprime la croissance dendritique au profit d'une croissance globulaire. On obtient ainsi une gelée semi-solide que l'on peut considérer, à fraction solide relativement faible, comme une suspension de particules ayant un faible degré de cohésion.

Les expériences de base sur le comportement des métaux à l'état semi-solide et à structure globulaire ayant une fraction volumique de solide faible ou moyenne ont été faites par Joly et Mehrabian au MIT[70]. Beaucoup de travaux depuis lors ont surtout consisté à proposer des modèles permettant de retrouver les principales propriétés qu'ils ont observées. La plupart de ces lois, pour des fractions de solide faibles ou moyennes, sont basées sur l'étude des suspensions et peuvent être divisées en trois parties :

- la modélisation de la viscosité apparente au cours de la solidification à vitesse de déformation donnée
- la modélisation du comportement de l'état stationnaire isotherme

– la modélisation de la thixotropie observée pendant le régime transitoire isotherme

– **Solidification avec brassage à une vitesse de cisaillement donnée**

Joly et Mehrabian[70] sont les premiers à proposer un modèle basé sur le couplage entre la fraction de solide  $f_s$  et la viscosité apparente  $\eta$  au cours du refroidissement continu sur la base des modèles standard utilisés pour les suspensions :

$$\eta = A e^{Bf_s} \quad (2.1)$$

avec  $A = A(\dot{\gamma})$ ,  $B = B(\dot{\gamma})$

Cette équation permet de retrouver les résultats expérimentaux sur les alliages  $Sn - 15\%Pb$ ,  $Bi - 17\%Sn$  et  $Zn - 27\%Al - 2\%Cu$  notamment.

Turng et Wang[123] proposent un modèle un peu plus sophistiqué qui introduit de façon un peu plus explicite la vitesse de cisaillement pour l'alliage  $Sn - 15\%Pb$  :

$$\eta = \left(1 - \frac{f_s}{f_s^*}\right)^{-m(\dot{\gamma})} \cdot \eta_\infty(f_s) \cdot \left(1 + \left[\frac{\dot{\gamma}^*(f_s)}{\dot{\gamma}}\right]^a\right)^{\frac{n}{a}} \quad (2.2)$$

où  $f_s^*$  est la fraction solide critique,

$m(\dot{\gamma})$ ,

$\dot{\gamma}^*(f_s)$ ,

$a$ , et  $n$  sont déterminés par ajustement avec les résultats expérimentaux.

Hirai et al [64] proposent un modèle qui introduit pour la première fois une dépendance par rapport à la microstructure.

$$\eta = \eta_l \cdot \left(1 + \frac{\bar{d} \cdot S_v}{2\left(\frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_s^*}\right)}\right) \quad (2.3)$$

$\bar{d}$  et  $S_v$  sont respectivement le diamètre effectif et la surface spécifique volumique (surface/volume) des particules. Les auteurs déterminent les valeurs du produit  $\bar{d} \cdot S_v$  pour l'alliage  $Al - 10\%Cu$  en fonction des vitesses de refroidissement et de cisaillement.

Okano[97] propose alors le modèle suivant qu'il dérive de l'analyse des relations entre la viscosité apparente du modèle de Hirai (2.3) et les conditions de fabrication de plusieurs types d'alliages :

$$\eta = \eta_l \left(1 + \frac{\alpha \rho_l C^{\frac{1}{3}} \dot{\gamma}^{-\frac{4}{3}}}{2 \left(\frac{1}{f_s} - \frac{1}{0.72 - \beta C^{\frac{1}{3}} \dot{\gamma}^{-\frac{1}{3}}}\right)}\right) \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{cases} f_s < 0.72 - \beta C^{\frac{1}{3}} \dot{\gamma}^{-\frac{1}{3}} \\ \alpha = 2.03 * 10^2 \left( \frac{x}{100} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \beta = 19.0 * \left( \frac{x}{100} \right)^{\frac{1}{3}} \\ x : \text{concentration du soluté principal (en \%)} \end{cases}$$

– **Modélisation de l'état stationnaire isotherme**

Joly et Mehrabian[70] utilisent une loi puissance pour modéliser le comportement de la faible variation de viscosité observée au cours des expériences stationnaires isothermes[44].

$$\eta = k \dot{\gamma}^{m-1} \quad (2.5)$$

$k$  et  $m$  dépendent de  $f_s$ .

Partant de ce modèle, et du fait que les déformations des particules solides à haute température constituent un mécanisme de dissipation d'énergie au cours du mélange des alliages semi-solides, Kattamis et Piccone proposent la loi suivante qui est utilisée pour l'alliage  $Al - 4.5\%Cu - 1.5\%Mg$ [72] :

$$\eta = \eta_l \left( 1 + \frac{\bar{d} S_v}{(\bar{d}_0 S_{v0}) \left( \frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_s^*} \right)} \right) + 2.0333 * 10^4 f_s (\dot{\gamma})^{-0.727} \quad (2.6)$$

Le premier terme est repris de (2.3) et le second terme représente les déformations viscoplastiques des entités solides.

Wang Nan et al[89][90] proposent une loi qui, comme celle de Kattamis, suppose que l'énergie est dissipée soit au cours du déplacement des particules solides dans la suspension, soit au cours des déformations viscoplastiques des agglomérats :

$$\eta = \eta_l \left( 1 + C_1 \frac{\left( \frac{f_s}{f_s^*} \right)^{\frac{1}{3}}}{1 - \left( \frac{f_s}{f_s^*} \right)^{1/3}} + C_2 \frac{\Delta \sigma f_s^2 \dot{\gamma}^{m-1}}{R_0 \dot{\gamma}_c^m} \right) \quad (2.7)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\Delta \sigma$ ,  $R_0$  et  $\dot{\gamma}_c$  sont des paramètres géométriques.

Turng et Wang[123] utilisent une version simplifiée de leur loi sur le refroidissement à vitesse de cisaillement donnée, comparable à celle de Wang, et qui assure le fait que la viscosité apparente tend asymptotiquement vers une certaine valeur quand la vitesse de cisaillement excède une valeur critique.

$$\eta = \eta_{\infty}(f_s) \left( 1 + \left[ \frac{\dot{\gamma}^*(f_s)}{\dot{\gamma}} \right]^a \right)^{\frac{n}{a}} \quad (2.8)$$

avec,  $\eta_{\infty}(f_s) = A_1 e^{B_1 f_s}$  et,  $\dot{\gamma}^*(f_s) = A_2 e^{B_2 f_s}$

– **Le comportement thixotrope**

Les modèles présentés ci-dessus proposent des lois de comportement ayant une équation constitutive qui est censée représenter le comportement stationnaire isotherme pour lequel un équilibre entre les processus d'agglomération et de désagglomération est atteint.

Toutefois, les procédés industriels ne durent que quelques secondes et les

viscosités stationnaires ci-dessus qui modélisent des comportements observés après plusieurs dizaines de minutes ne sont pas appropriées pour simuler un procédé de formage industriel comme le thixoforgeage ou le thixoformage par exemple. C'est pourquoi plusieurs auteurs ont développé des modèles capables de prendre en compte le comportement des gélées semi-solides au cours d'un régime transitoire. Les propriétés thixotropes transitoires sont plus difficiles à mesurer, car il est difficile d'assurer l'uniformité de l'écoulement lorsque les conditions comme la température et la vitesse de cisaillement varient. Dans ce domaine on note l'utilisation de modèles à variable interne qui considèrent un ensemble de deux équations scalaires décrivant respectivement le comportement de l'écoulement à une structure interne donnée et l'évolution de la variable interne en fonction des conditions de l'écoulement :

$$\begin{cases} \tau &= \eta(\dot{\gamma}, s) \cdot \dot{\gamma} \\ \frac{ds}{dt} &= g(\dot{\gamma}, s) \end{cases}$$

Un tel modèle suppose que la dépendance temporelle des propriétés rhéologiques des gélées est due aux changements dans la structure du système, changements pouvant être représentés par une variable scalaire ici notée  $s$ . Notons que les équations (2.5, 2.6, 2.7, 2.8) peuvent être vues comme des cas particuliers du système général défini ci-dessus à l'état stationnaire ( $\frac{ds}{dt} = 0$ ). Le paramètre  $s$  représente une mesure scalaire de l'état d'agglomération du matériau semi-solide :  $0 \leq s \leq 1$

#### – Le modèle de Cheng et Evans

Cheng et Evans[74][24] ont proposé un modèle qui utilise une approche expérimentale pour obtenir les paramètres thixotropes de base. Leur modèle simplifié, encore appelé modèle de Moore s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tau &= (\eta_\infty + c \cdot s) \cdot \dot{\gamma} \\ \frac{ds}{dt} &= a(1 - s) - b \cdot s \dot{\gamma} \end{cases}$$

$\eta_\infty, a, b,$  et  $c$  étant des paramètres dépendants du matériau

On retrouve parfaitement l'état stationnaire qui s'écrit :

$$\begin{cases} \tau &= \left( \eta_\infty + \frac{c \cdot a}{a + b \dot{\gamma}} \right) \cdot \dot{\gamma} \\ \frac{ds}{dt} &= 0 \end{cases}$$

On remarque que même pour un modèle aussi simple que celui-ci, la viscosité n'est pas une simple fonction puissance de  $\dot{\gamma}$ .

$$\eta = \left[ \eta_\infty + \frac{c \cdot a}{a + b \dot{\gamma}} \right] \quad (2.9)$$

Pour  $\dot{\gamma}$  grand, on a un comportement newtonien. Pour le modèle complet de Cheng et Evans, consulter l'article [24].

#### – Le modèle de Kumar, Martin et Brown

P. Kumar, C.L. Martin et S.B. Brown[78] proposent le modèle suivant :

$$\begin{cases} \tau &= \tau_h + \tau_p \\ \frac{ds}{dt} &= \hat{h}(\dot{\gamma}, T, f_s, s) - \hat{r}(\dot{\gamma}, T, f_s, s) \end{cases}$$

La première équation représente les caractéristiques de l'écoulement du



matériau pour un état interne donné. Elle suppose que la vitesse de dissipation de l'énergie dans le fluide peut être considérée comme un potentiel, et que l'énergie est dissipée de deux manières différentes dans le système :

- par les *interactions hydrodynamiques* entre les agglomérats et,
- par les *déformations plastiques des liens particules-particules* qui sont supposées provenir de l'action des forces hydrodynamiques sur les particules liées.

$\tau_h$  et  $\tau_p$  représentent respectivement les contributions dues aux interactions hydrodynamiques et aux déformations plastiques des liens particules-particules.

La seconde équation représente l'évolution de la variable interne  $s$ , qui représente le degré d'agglomération des particules solides dans le matériau semi-solide.  $s$  vaut 1 pour un état complètement aggloméré, et vaut 0 pour l'état complètement désaggloméré où toutes les particules sont complètement déconnectées. Son évolution dépend de la compétition entre les cinétiques d'agglomération et de désagglomération. C'est ainsi que le premier terme de l'équation d'évolution temporelle de la variable interne est la fonction d'agglomération et le second terme est la fonction de désagglomération. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tau_h & = & A(s) \frac{\left(\frac{C}{C^*}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 - \left(\frac{C}{C^*}\right)^{\frac{1}{3}}} \eta_f \dot{\gamma} \\ \tau_p & = & (n+1) \cdot C(t) \cdot s \cdot f_s \cdot \eta^{n+1} \cdot \dot{\gamma}^n \\ \hat{h}(\dot{\gamma}, T, f_s, s) & = & H(T, f_s) \cdot (1-s) \\ \hat{r}(\dot{\gamma}, T, f_s, s) & = & R(T, f_s) \cdot s \cdot \dot{\gamma}^n \end{array} \right.$$

Ce modèle permet de retrouver les boucles d'hysteresis, ce qui montre que l'interprétation physique des caractéristiques de l'écoulement et des cinétiques d'agglomération n'est pas erronée. Il a en outre été utilisé par Zavaliangos [133] puis par Ilegbushi [67] pour la simulation du matriçage et du remplissage de moules.

#### – Le modèle de Barkhudarov, C.L. Bronisz, C.W. Hirt

Cette approche est basée sur une équation empirique d'évolution de la viscosité dynamique apparente  $\eta$ . Cette équation comprend un terme de convection et un terme de relaxation tenant compte de la thixotropie du matériau. Le terme de relaxation est défini par deux variables dépendantes de la vitesse de cisaillement et de la fraction volumique de solide qui sont la viscosité à l'état stationnaire et le temps de relaxation. L'équation décrivant l'évolution de la viscosité apparente est alors :

$$\frac{d\eta}{dt} = \omega(\eta_0 - \eta) \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{cases} \omega &= \frac{1}{\tau} \text{ la fréquence de relaxation} \\ u &: \text{ vitesse du fluide} \\ \eta_0(f_s, \dot{\gamma}) &: \text{ la viscosité du fluide} \end{cases}$$

Cette équation est déduite de celle de Moore où  $s$  représente la structure interne. L'équation de transport pour  $s$  inclut des termes décrivant l'agglomération et la désagglomération structurale[74] :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (u \nabla) s = a(1 - s) - b \cdot s \dot{\gamma} \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ a \text{ et } b \text{ constantes positives} \end{cases}$$

La viscosité apparente est alors linéaire en fonction de  $s$  :

$$\begin{cases} \eta = \eta_\infty + C \cdot s \\ \eta_\infty > 0 \\ C > 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $\eta$  par sa valeur dans l'équation (2.10), on obtient les correspondances entre ce modèle et le modèle de Moore :

$$\begin{cases} \eta_0 = \eta_\infty + \frac{a \cdot C}{a + b \dot{\gamma}} \\ \omega = a + b \dot{\gamma} \end{cases}$$

Ce modèle est censé marcher pour des fractions volumiques de solide faibles ou moyenne. La viscosité du régime permanent et le temps de relaxation sont déterminés expérimentalement. Ce modèle a permis de reproduire les courbes expérimentales d'hysteresis des contraintes de cisaillement avec une bonne précision. Toutefois, les résultats pour la tension de cisaillement sont très sensibles à la valeur exacte du temps de relaxation. Le modèle ne suppose aucune dépendance du temps de relaxation vis-à-vis de la fraction de solide.

## 2.5.2 Les modèles viscoplastiques

Ces modèles, qui constituent en fait la limite des classes de modèle précédent (état stationnaire pour thixotropie ou très faible phase liquide), sont généralement utilisés pour modéliser le comportement des métaux à chaud. C'est cette classe de modèle que l'on rencontre fréquemment dans la littérature pour modéliser le comportement des métaux au cours de l'injection. Les modèles sont généralement de type loi puissance et le plus fréquemment utilisé est le modèle de Norton-Hoff avec quelques petites variantes, dont celle de Rappaz et al qui utilisent un modèle de type cut-off dans lequel un seuil est introduit [99][98].

$$S = \sigma + pId = 2\eta_{app}\dot{\epsilon}$$

avec la viscosité apparente  $\eta_{app}$  qui est une fonction de la consistance  $K$  du matériau que multiplie une fonction exponentielle du taux de déformation  $\dot{\epsilon}$ .

$$\eta_{app} = K(T) \left( \sqrt{3}\dot{\epsilon} \right)^{m(T)-1}$$

où le coefficient  $m$  représente la sensibilité à la vitesse de déformation. Il vaut environ 0.2 pour un métal à chaud, et 1, pour un métal à l'état liquide, ce qui correspond au cas particulier d'un comportement newtonien. A l'état semi-solide, le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation varie donc entre 0 et 1. L'avantage de ces modèles est leur simplicité. C'est pour cette raison que nous avons choisi d'identifier le comportement de notre matériau à l'état semi-solide par ce type de loi, qui constitue un bon compromis entre une approche réaliste du comportement semi-solide et les capacités actuelles d'identification des paramètres rhéologiques. C'est également un tel modèle que Vicente [124] utilise pour décrire le comportement d'alliage semi-solide à structure dendritique (voir aussi Chapitre 3 paragraphe 3.2.4).

### 2.5.3 Lois basées sur les modèles biphasés

#### Phénoménologie

Lorsque la fraction volumique de solide de la gelée est assez élevée, les particules solides commencent à interférer et on a alors la formation d'un squelette solide continu. La déformation d'un tel milieu se caractérise par :

- des contraintes élevées, du même ordre que celles nécessaires pour déformer la phase solide du matériau.
- la présence d'une phase solide compressible et d'une phase liquide dont l'écoulement est provoqué par les déformations subies par le squelette solide.

Les modèles développés sont donc basés sur les modèles de déformation à chaud des solides poreux. Ceci permet de prédire les déformations du squelette solide, l'écoulement du liquide étant gouverné quant à lui par une loi de type Darcy [19].

#### Modélisation du matériau

A partir d'expériences à faible vitesse de déformation, Charreyron et Flemings déduisent que le squelette solide se comporte comme un corps viscoplastique compressible et sensible à la température. Le modèle qu'ils proposent est alors [19] :

$$(f' \sigma_0)^2 = 3J_2 + \left(\frac{1}{3}f\right)^2 I_1^2 \quad (2.12)$$

avec  $\sigma_0$  = contrainte de l'écoulement du matériau solide constituant le squelette  $= k \dot{\epsilon}^m$

$I_1$  et  $J_2$  premier et second invariants du tenseur des déformations  $\underline{\sigma}$ .

$$I_1 = tr(\underline{\sigma}) \quad J_2 = \frac{1}{2}tr(S : S) \quad \underline{S} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\underline{\sigma}) \quad (2.13)$$

$f$  et  $f'$  sont deux fonctions dépendantes de la fraction de solide  $f_s$  et prennent respectivement les valeurs 0 et 1 pour  $f_s = 1$ , ce qui correspond au cas d'un matériau incompressible.

Pour l'alliage dendritique  $Sn - 15\%Pb$ , on a :

$$f = \alpha(1 - f_s)^{-\beta} \quad \text{et} \quad f' = f_s^\gamma$$

Pour la compression axisymétrique, Lalli propose un modèle monodimensionnel prenant en compte les interactions entre les tensions solides et la pression du liquide[80] :

$$\sigma = \hat{\sigma}_s - \alpha_l P_l \quad (2.14)$$

$\sigma$  = contrainte totale,  $\hat{\sigma}_s$  = contrainte effective,  $P_l$  étant la pression interstitielle et  $\alpha_l$  un paramètre.

La loi d'écoulement est alors la suivante :

$$(f_s \sigma_0)^2 = 7(1 + \nu) J_2' + \frac{7}{3}(1 - 2\nu) J_1^2 \quad (2.15)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson mesurant le rapport entre les tensions radiales et axiales du matériau poreux au cours de la compression. On pose  $\nu = 0.5 f_s^p$ , ce qui est consistant avec la condition d'incompressibilité  $\nu = 0.5$  pour  $f_s = 1$ .

Pour modéliser la vitesse du liquide, Lalli utilise une loi de Darcy en supposant l'écoulement laminaire à travers le squelette solide[80] :

$$V_l = -\frac{K}{\eta_l f_l} \cdot \frac{dP}{dr} \quad (2.16)$$

où  $K = \gamma f_l^2$  est la perméabilité du squelette solide.

On a donc un couplage des déformations solides et de l'écoulement du liquide, ce qui permet de prédire la ségrégation du liquide au cours du procédé de mise en forme.

Le modèle de Toyoshima et Oakahashi est semblable à celui de Lalli. Le matériau semi-solide est considéré comme un milieu biphasé composé d'un squelette solide saturé de liquide. On a la même équation pour les contraintes avec  $\alpha_l = 1$ , et la même loi de Darcy pour la vitesse du liquide. Ce modèle a été utilisé pour simuler la filtration, l'extrusion, le laminage, l'écrasement entre tas plats et l'écroulement sans contrainte extérieure[121].

Nguyen, Favier et Suéry proposent le modèle[95] :

$$\underline{\sigma} = \underline{\hat{\sigma}}_s - \alpha_l P_l \underline{l} \quad (2.17)$$

Ce modèle est une extension des modèles de plasticité poreux, indépendants de la vitesse. Il suppose l'existence d'un potentiel viscoplastique  $\Phi$  qui peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $I_1$  et  $J_2$  (2.13), les premier et second invariants du tenseur effectif des contraintes :

$$\Phi = \frac{K(T)}{n+1} \left( A J_2 + B I_1^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \quad (2.18)$$

$A$  et  $B$  dépendent de la fraction volumique de solide,  $K(T)$  dépend de la température et  $n$  est l'exposant de la loi puissance viscoplastique. On obtient alors

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(I_1, J_2, f_s)$$

comme l'ont proposé Abouaf et al pour la compaction de poudre à haute température [1] :

$$\sigma_{eq}^2 = A(f_s) J_2 + B(f_s) I_1^2 \quad (2.19)$$

avec

$$A(f_s) = \frac{3}{f_s^p} \text{ et } B(f_s) = \alpha\left(\frac{1}{f_s^q} - 1\right)$$

obtenu par ajustement sur les valeurs expérimentales.

En négligeant les forces d'inertie, l'équation de l'écoulement du liquide s'écrit :

$$u_r = u_l - u_s = -\frac{K}{\rho_l} \nabla P_l + K \cdot b_l \quad (2.20)$$

Cette équation se réduit en une loi de Darcy lorsque les forces  $b_l$  du squelette qui s'exercent sur le liquide disparaissent[53].

Toutefois, les lois viscoplastiques utilisées n'incluent pas de seuil. Ceci a pour conséquence d'imposer la symétrie des comportements en traction et en compression et une vitesse de densification non nulle quelque soit la pression hydrostatique s'exerçant sur le squelette solide. Ce comportement est en contradiction avec les observations expérimentales.

Martin et al proposent alors le modèle suivant [89][90] qui consiste en un décentrement du potentiel viscoplastique du côté des pressions positives.

$$\sigma_{eq}^2 = A_l(f_s)J_2 + \left[ \sqrt{B_l(f_s)I_1} - \sigma_{eq} \sqrt{1 - (C_1(f_s))^2} \right] \quad (2.21)$$

$C_1$  étant la cohésion de la phase solide ( $C_{1max} = 1$ ).

## 2.5.4 Conclusion : cas des alliages globulaires à fraction de solide $f_s \simeq 0.5$

Pour le procédé d'injection, on se place généralement à une fraction de solide proche de 0.5. La structure de ces alliages est constituée de particules globulaires très faiblement agglomérées entourées de liquide. L'état d'agglomération change au cours des procédés de mise en forme. Les tests effectués sur ce type de matériau présentent trois principales caractéristiques :

- la contrainte d'écoulement augmente avec l'accroissement de la fraction de solide et varie avec la vitesse de cisaillement [82] ;
- le matériau a un comportement thixotrope au cours des variations brutales de la vitesse de cisaillement [44] ;
- la ségrégation du liquide est observée, notamment au cours des essais de filage arrière [82], mais diminue avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement.

On a donc à la fois la thixotropie et la ségrégation du liquide (agglomération de la partie solide), même si ce phénomène semble un peu moins important à de fortes vitesses d'injection. Malheureusement, aucun modèle à l'heure actuelle ne permet de prendre en compte simultanément ces deux phénomènes. Les modèles de suspension supposent que le matériau est homogène et modélisent donc bien le comportement de métaux dans l'état semi-solide lorsque la fraction de solide est faible. Ils permettent de prendre en compte la thixotropie. Les modèles biphasés supposent pour leur part l'existence d'un squelette solide à l'intérieur duquel le liquide

s'écoule. Ils permettent de mieux prédire l'écoulement du liquide, mais ne prennent pas en compte la thixotropie du matériau. Ils modélisent mieux le comportement des métaux à l'état semi-solide lorsque la fraction de solide est élevée. D'autre part, les modèles de suspension prenant en compte la thixotropie sont généralement difficile à exploiter à cause du nombre élevé de leurs paramètres. Aussi, de nombreux auteurs utilisent des modèles viscoplastiques. Et, c'est pour notre part le choix que nous avons fait.

## Chapitre 3

# CARACTERISATION RHEOLOGIQUE

Nous avons vu au chapitre précédent les principaux modèles utilisés pour décrire le comportement des métaux à l'état semi-solide. Ces modèles, en général, ne sont valables que pour une certaine plage de température et permettent de décrire en particulier le phénomène qui est dominant dans l'écoulement. Ils s'adaptent donc bien à des conditions de mise en forme isotherme. Pour le procédé d'injection, les débits sont en général élevés et les temps de remplissage courts. On observe donc une forte dissipation d'énergie pouvant compenser le refroidissement du moule. De plus, le fait que le moule soit régulé à une température relativement faible par rapport à celle du matériau injecté et que les métaux soient de bons conducteurs de chaleur induit de forts gradients thermiques à l'intérieur du matériau injecté. Ceci a pour conséquence de faire cohabiter plusieurs types d'écoulements au sein du matériau, en fonction de la température. Malheureusement, pour le cas spécifique de l'injection, très peu d'études ont été faites dans les conditions réelles du procédé. Nous avons donc été amenés à mettre au point un nouveau test rhéologique représentatif du procédé d'injection de métaux à l'état semi-solide. Après un rappel bibliographique sur les expériences de caractérisation rhéologique des métaux à l'état semi-solide, nous procédons dans ce chapitre à la description de notre test, ainsi qu'à la présentation des résultats expérimentaux, au dépouillement de ces résultats et à l'identification des paramètres rhéologiques d'une loi assez représentative de l'écoulement.

### 3.1 Rappel bibliographique sur les expériences faites pour décrire l'écoulement des métaux à l'état semi-solide

Nous présentons dans les lignes qui suivent les principales expériences de caractérisation rhéologique faites pour décrire le comportement de métaux à l'état semi-solide.

### 3.1.1 Ecoulement sous gravité

C'est un essai qui montre bien que le métal à l'état semi-solide a un comportement rhéofluidisant. Au repos, il est assez consistant et peut être transporté à l'aide de pinces. L'écoulement sous gravité permet alors d'observer le comportement du métal au repos. Le métal est déposé sur une table après avoir été porté à l'état semi-solide avec pour seule force extérieure son poids. On observe ainsi, au bout de quelques minutes, l'écoulement progressif du métal sous l'action de la gravité. Il peut être utile pour l'étude du comportement du matériau au repos, c'est à dire pendant le maintien isotherme qui suit la refusion partielle [133]. Toutefois on n'observe pas de grandes variations de la vitesse de déformation pendant l'essai, ce qui conduit donc à de faibles variations de la viscosité apparente.

### 3.1.2 Cisaillement dans les rhéomètres de couette

C'est ce type d'expérience qui a permis au début des années soixante dix à l'équipe du professeur Flemings de découvrir la structure globulaire [115]. Depuis lors, ce test a été souvent utilisé pour caractériser le comportement des métaux à l'état semi-solide par de nombreuses équipes de recherche. Les alliages utilisés sont généralement des alliages métalliques à bas point de fusion comme par exemple l'alliage Sn-Pb. C'est un test qui met le matériau en condition de cisaillement pur, et permet ainsi d'étudier de manière précise la réaction du matériau (évolution de son comportement) à un cisaillement. Cette expérience, généralement utilisée en laboratoire dans des conditions isothermes, ne permet pas d'étudier l'évolution du comportement du matériau en fonction de la température.

### 3.1.3 Compression simple entre plateaux parallèles

C'est un test classique qui a été utilisé par plusieurs auteurs [82][84][53]. Pour la plupart d'entre eux, il y a ségrégation de la partie liquide. Toutefois, Gebelin [53] fait dans son cas l'hypothèse qu'en début d'essai, pour une déformation  $\varepsilon \leq 5\%$ , le matériau reste homogène et, il met en évidence le caractère rhéofluidisant du matériau semi-solide à une température de  $580^\circ\text{C}$ . Ces travaux ont été réalisés avec un alliage d'aluminium. Le principal inconvénient est qu'il ne permet pas d'obtenir des taux de déformation équivalents à ceux rencontrés sur le procédé réel, ce qui est très gênant, vu la forte dépendance de sa viscosité à la vitesse de cisaillement.

### 3.1.4 Indentation

Cet essai consiste à enfoncer une aiguille pilotée en vitesse ou en force dans un alliage généralement à structure dendritique porté à l'état semi-solide. Pour des essais en conditions isothermes, l'alliage est placé dans un moule à refroidissement contrôlé de telle sorte qu'on obtienne des isothermes verticales dans l'alliage. Ainsi, l'indentation verticale s'effectue-t-elle dans une région à température quasi constante. Cet essai permet de pallier les insuffisances des essais de compression et



de traction classiques pour les alliages à l'état semi-solide, à cause de leur fragilité et de l'écoulement hétérogène de la phase liquide. Les caractéristiques principales de cet essai sont :

- l'imposition de faibles niveaux de déformation et de vitesse de déformation,
- une caractérisation rhéologique opérée au refroidissement en évitant un réchauffage,
- une sollicitation locale entraînant une large zone de déformation et de vitesse de déformation et permettant de remonter à des données quantitatives sur le comportement rhéologique,
- la compatibilité avec les structures dendritiques.

Cet essai a été réalisé au CEMEF par Vicente [124] qui, au cours de sa thèse, utilisa le calcul par éléments finis pour déterminer la géométrie de l'aiguille et celle du moule. L'essai a été pratiqué à diverses forces exercées sur l'aiguille. Pour chacune d'elle, on enregistre la vitesse d'indentation. Pour le dépouillement de l'essai, il simule à l'aide du logiciel Forge2 l'indentation pour une vitesse ou une force de pénétration donnée à différentes caractéristiques du matériau et pour différents coefficients de sensibilité à la vitesse de déformation. Il présente les résultats de l'essai sous forme de courbes Force/Déplacement et modélise l'essai en utilisant la loi de comportement de Norton-Hoff :

$$\bar{\sigma} = K\sqrt{3}(\sqrt{3}\dot{\bar{\epsilon}})^m$$

Cette loi exprime la contrainte d'écoulement équivalente  $\bar{\sigma}$  en fonction de la consistance  $K$ , de la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\bar{\epsilon}}$  ainsi que du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$ . Il identifie les coefficients  $K$  et  $m$  de la loi de Norton-Hoff par analyse inverse en utilisant le logiciel Sidolo couplé avec Forge2. Du point de vue de la caractérisation de matériaux pour l'injection thixotrope, l'inconvénient principal est le faible niveau de vitesse de déformation, insuffisant pour représenter ceux rencontrés au cours du procédé d'injection. A cet égard ce test est nettement plus orienté vers la caractérisation de rhéologies utilisées dans la coulée classique, à faible niveau de déformation et de vitesse de déformation.

### 3.1.5 Filage arrière

Ce test a été utilisé à Grenoble par Loué et par Gebelin. Le test a été fait à une température de  $580^{\circ}C$ . Dans les deux cas, on observe une ségrégation de la partie liquide. Cependant, Loué [82] a montré dans son cas qu'il existe une vitesse limite au dessus de laquelle il n'y a plus de ségrégation. Gebelin [53], quant à lui, n'a pas pu mettre en évidence des zones riches en liquide en haut de la partie filée. Il a néanmoins observé à une température de  $580^{\circ}C$  que, à partir d'une vitesse de piston de  $80mm/s$ , il n'y a pas de densification sous le piston. Pour de faibles vitesses, il a mis en évidence des zones fortement densifiées sous le piston. Il observe en outre, comme Loué [82], que le matériau a un comportement rhéofluidifiant, la viscosité diminuant avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement [53]. Ce test présente l'avantage de permettre, par l'augmentation de la vitesse du piston, de parvenir à des niveaux de déformation et de vitesse de déformation du même ordre que ceux du

procédé réel. Il permet de mettre en évidence le rôle central de la vitesse d'injection sur le mode d'écoulement du matériau. Pour de faibles vitesses d'injection, on a un écoulement diphasique marqué par les ségrégations des parties solide et liquide et, en revanche, pour des vitesses d'injection suffisamment fortes, on a un écoulement monophasique, ce qui est confirmé par les calculs d'homogénéisation de Geindreau [54].

### **3.1.6 Conclusion**

Au terme de ce petit rappel des essais déjà effectués pour caractériser le comportement des métaux à l'état semi-solide, on peut constater qu'aucun d'eux ne répond parfaitement aux conditions réelles du procédé de thixoformage. Pour rappel, dans le procédé de thixoformage, le matériau est d'abord réchauffé jusqu'à une température comprise entre le solidus et le liquidus, généralement en utilisant un chauffage par induction. Il est ensuite transporté mécaniquement jusqu'à la zone d'injection et injecté sous la poussée d'un piston dans le moule. C'est un écoulement où on note la présence de cisaillements importants et de l'élongation. Nous avons donc été amenés à imaginer un nouveau test rhéologique. Ce travail a été commencé par Olof Hervieux au cours de sa thèse de doctorat sur le thixoformage d'alliages d'aluminium et de magnésium. Ensuite, avec l'aide du bureau d'étude, nous avons affiné l'étude de sa faisabilité, puis procédé à sa réalisation. Le test de type écoulement de Stefan est décrit au paragraphe suivant.

## **3.2 Description de l'essai développé dans le cadre de ce travail**

### **3.2.1 Le test de l'écoulement de Stefan**

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'écoulement d'un métal à l'état semi-solide au cours de la phase d'injection est assez complexe. En injection, les conditions rencontrées sont l'élongation et le cisaillement. Le test rhéologique mis au point en collaboration avec le groupe de recherche Métallurgie Structure et Rhéologie du CEMEF est le test de l'écoulement de Stefan : c'est un écoulement entre deux disques parallèles. Le matériau, placé au centre des deux disques, s'écoule radialement dans l'espace qui les sépare (voir figure 3.1 ).

Ces conditions sont en effet assez proches de celles qu'on rencontre dans des injections grandeur nature. Cette géométrie a donc été utilisée parce qu'elle est assez représentative du procédé d'une part, et parce qu'elle est assez simple pour permettre une instrumentation. C'est un cas 3D présentant une symétrie axiale, donc facilement utilisable pour l'identification des paramètres rhéologiques, dans la mesure où un code de simulation 2D axisymétrique suffirait largement pour l'identification de ces paramètres.

### 3.2.2 Les paramètres du procédé

#### L'alliage A356 et sa température de mise en forme

L'alliage utilisé est l'Althix 67S (alliage A356) produit par Pechiney. C'est un alliage hypoeutectique dont la teneur en silicium est d'environ 7%. Selon le diagramme de phase, la fraction de solide au niveau de l'eutectique est de l'ordre de 50% et pour une température d'environ  $572^{\circ}\text{C}$ . En utilisant l'évolution obtenue par la loi de Scheil, on montre que l'intervalle de solidification de l'alliage A356 utilisé en thixoformage est compris entre  $545^{\circ}\text{C}$  (température du solidus) et  $615^{\circ}\text{C}$  (température du liquidus) [60]. En tenant compte de la température de l'eutectique, on a donc un intervalle de solidification utile qui est de  $43^{\circ}\text{C}$  environ. La mise en forme par thixoformage de cet alliage se fera donc pour des températures comprises entre  $572^{\circ}\text{C}$  et  $615^{\circ}\text{C}$ . Aussi, dans le cadre de nos expériences d'injection, on s'est placé dans cet intervalle de solidification "utile" de l'alliage A356.

#### Température du moule

Selon notre partenaire industriel STAMPAL, les températures de moule sont généralement supérieures à  $200^{\circ}\text{C}$ . En effet, une température très basse du moule provoque une solidification précoce dans les parois minces et dans les zones éloignées du front de matière. Pour les pièces injectées dans le cadre du projet ADFORM et pour les pièces industrielles fabriquées par STAMPAL en utilisant ce procédé, le meilleur compromis est trouvé pour des températures comprises dans l'intervalle  $220^{\circ}\text{C} - 230^{\circ}\text{C}$ . C'est également dans cet intervalle de température que la plupart des fondeurs se placent pour le thixoformage. Aussi, pour nos expériences d'injection, nous avons pris une température du moule d'environ  $220^{\circ}\text{C}$ .

#### Vitesse d'injection

C'est l'un des paramètres les plus importants en mise en forme à l'état semi-solide. En effet, une vitesse d'injection trop importante peut provoquer un écoulement turbulent et donc des porosités dans la pièce mise en forme. En revanche, une vitesse d'injection trop faible peut provoquer une solidification précoce de l'alliage au cours du remplissage du moule. Pour le procédé de thixoformage, elle est généralement comprise entre  $0.5\text{m/s}$  et  $2\text{m/s}$  dans les conditions industrielles, les lopins initiaux ayant généralement des diamètres importants. Pour nos essais, avec des diamètres de lopins de  $25\text{mm}$ , nous avons injecté à des vitesses comprises entre  $80\text{mm/s}$  et  $160\text{mm/s}$ .

#### Epaisseur limite du moule

Selon les expériences faites dans le cadre du projet ADFORM par STAMPAL, l'épaisseur limite pour les pièces industrielles est de l'ordre de  $3\text{mm}$ . Pour des pièces minces et de surface importante par rapport à leur volume et ayant une épaisseur inférieure à ce seuil, on a des risques importants de solidification précoce dans le

moule. Comme nous le verrons dans la suite, l'écart entre les disques est variable dans notre montage expérimental.

## 3.3 Réalisation du montage

### 3.3.1 Etapes de conception

L'objectif ici est de concevoir le dispositif expérimental capable de nous permettre d'effectuer le test de l'écoulement de Stefan. La première étape fut la conception du dispositif de chauffage. En effet, le matériau, dans notre cas l'alliage d'aluminium A356, doit être réchauffé jusqu'à une température comprise dans son intervalle de solidification, avant d'être injecté. C'est la raison pour laquelle nous avons placé le four juste en dessous du moule, un poussoir permettant ensuite son transport jusqu'au conteneur. Compte tenu de la température élevée du four, celui-ci est isolé thermiquement du reste du montage. Un thermocouple permettant de réguler sa température est placé sur la surface du four et ses dimensions calculées de manière à permettre un chauffage uniforme des lopins. Ensuite, on a conçu le moule pour permettre de faire varier l'épaisseur des pièces injectées par la modification de l'espacement entre les plateaux. Le moule devra enfin être facilement démontable pour permettre sa lubrification entre deux injections successives. La réalisation de ce montage a été faite au CEMEF par le bureau d'étude et l'atelier mécanique.

### 3.3.2 Description des différents organes

La machine utilisée est l'INSTRON, une machine servo-hydraulique de traction-compression. Elle peut mesurer des efforts jusqu'à  $100kN$ , et elle fonctionne soit à vitesse de déformation constante, soit à vitesse constante. Le piston est relié au vérin de la machine, ce qui permet de contrôler sa vitesse. Les efforts sont mesurés par l'intermédiaire d'une cellule.

Pour une injection proprement dite, la première phase est le réchauffage du matériau pendant vingt minutes environ, jusqu'à une température comprise dans son intervalle de solidification, c'est à dire dans notre cas entre  $575^{\circ}C$  et  $585^{\circ}C$ , ce qui correspond à une fraction de solide voisine de 0.5. Le matériau est alors poussé latéralement à l'aide du poussoir jusqu'au canal d'injection et injecté sous la poussée du piston entre les deux disques parallèles, avec une vitesse maximale de  $160mm/s$ , pendant que la force d'injection est enregistrée.

Le four d'une puissance de  $2.4kw$  est fabriqué à partir de l'acier réfractaire 56T5 de Aubert et Duval (en norme française Z35CDV5). Ce matériau a été choisi pour ses propriétés de résistance aux chocs thermiques. Il est généralement utilisé pour fabriquer des outils de fonderie d'alliages légers et a de bonnes propriétés de résistance à l'oxydation à haute température.

Le moule est fabriqué à partir du même acier réfractaire, matériau choisi pour sa résistance à l'oxydation à haute température. Le moule est préchauffé jusqu'à une température d'environ  $220^{\circ}C$ .

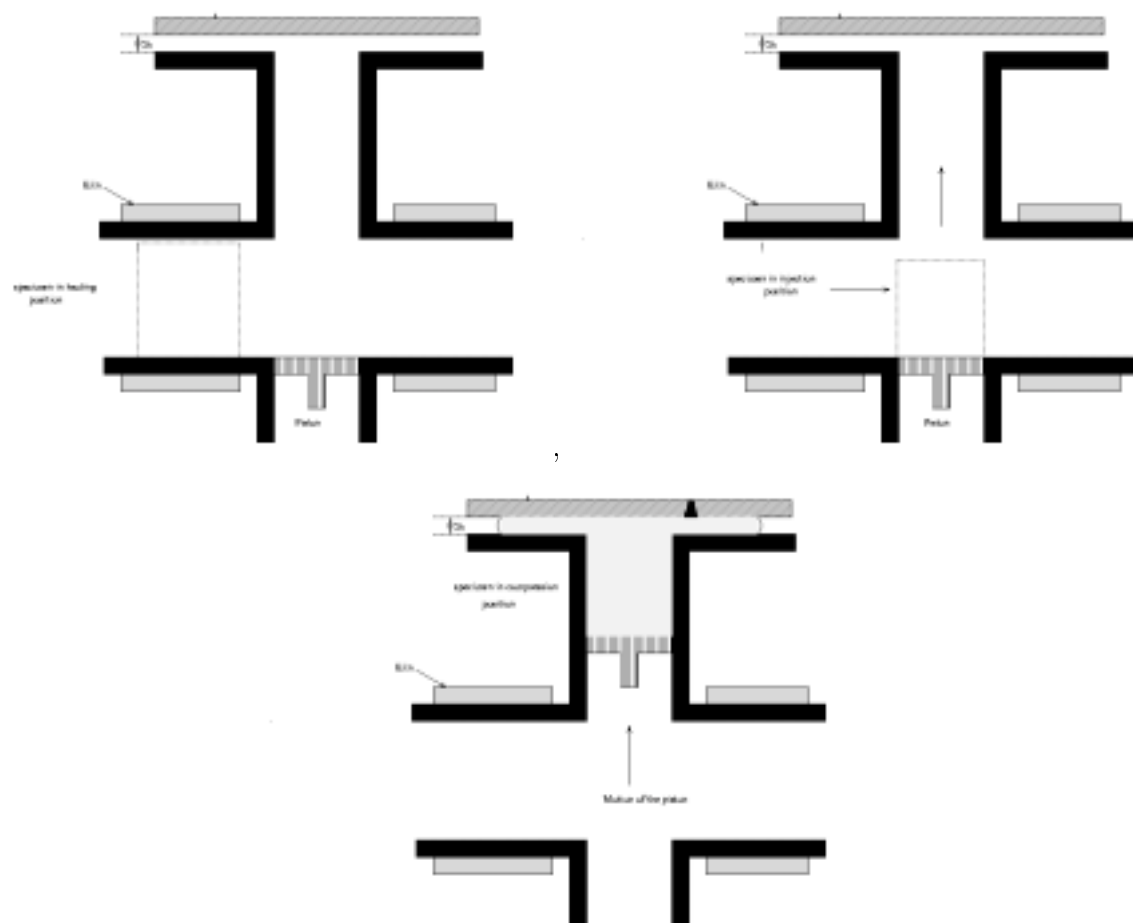


FIG. 3.1 – Schéma fonctionnel du montage d'injection

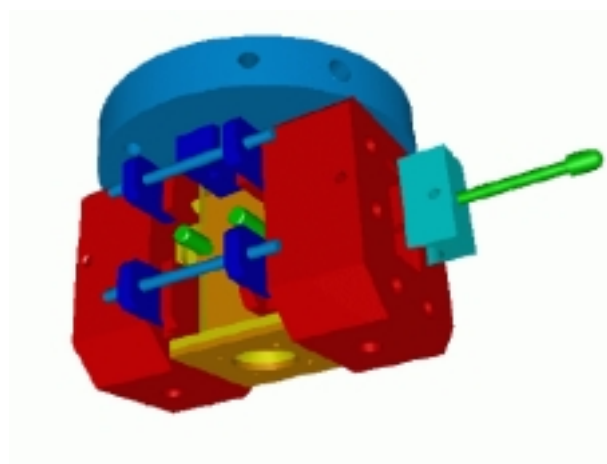


FIG. 3.2 – CAO du montage d'injection

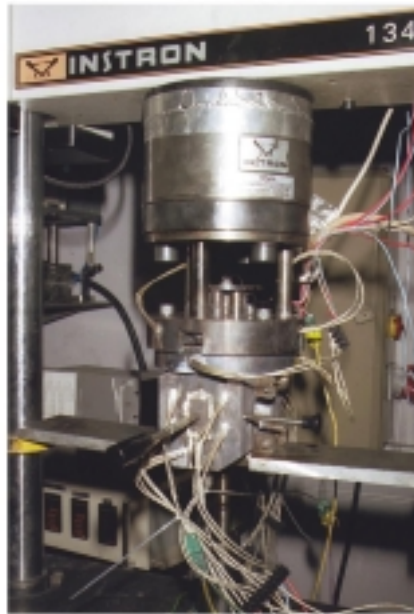


FIG. 3.3 – (a)Montage expérimental et son instrumentation, installés sur une machine de traction-compression et (b) dispositif d'acquisition des résultats

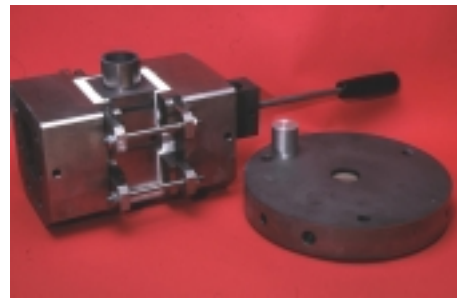


FIG. 3.4 – Une vue du montage expérimental incluant (a) la partie inférieure du moule, les deux fours, le conteneur (b) et vue de l'isolation thermique du four

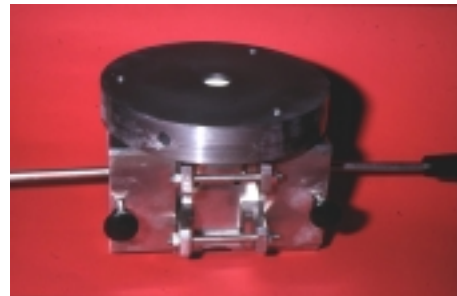


FIG. 3.5 – Vues d'ensemble du montage d'injection

Le conteneur est fabriqué à partir du même alliage que le four et le moule. Il est thermiquement isolé du four et du moule par des isolants à base de céramique.

Le piston est fabriqué à partir d'un alliage de cuivre-béryllium, matériau généralement utilisé pour la fabrication des pistons en fonderie.

### **Le traitement en surface des outils**

Les surfaces de ces outils sont recouvertes par un traitement lubrifiant et anti-adhérent, microseal 100 – 1. Généralement utilisé dans l'aéronautique et pour le moulage d'alliages d'aluminium, c'est un traitement complémentaire appliqué après usinage et avant montage. Le procédé utilisé est la projection à froid des micro-particules de lubrifiants solides qui pénètrent dans le matériau jusqu'à une profondeur de quelques microns et y restent incrustées, résistant même à de très hautes températures. Ceci permet la limitation des frottements et l'attaque de ces outils par l'aluminium liquide.

## **3.4 Expériences de chauffage**

### **3.4.1 But**

Nous avons vu au chapitre précédent que l'écoulement du métal à l'état semi-solide était fortement dépendant du temps de maintien isotherme lorsqu'on l'obtient par refusion partielle. Aussi, si on a un lingot thixotrope, un temps de maintien isotherme court permet d'obtenir une structure globulaire. En revanche, un temps de maintien isotherme long a pour conséquence de favoriser la croissance des globules, et donc de rendre le matériau moins fluide, d'où l'importance de la phase de réchauffage qui est le point le plus important du procédé. On cherche en effet à être homogène en température tout en minimisant la croissance de la structure. Le temps de maintien isotherme détermine la qualité de l'écoulement et donc des pièces injectées. Aussi, au cours des expériences que nous décrivons dans les paragraphes suivants, nous nous sommes attelés d'une part au calage de nos instruments de mesure et d'autre part à la détermination du temps de réchauffage des lingots et à l'estimation de l'ordre de grandeur du coefficient d'échange thermique entre le lingot et l'outillage.

### **3.4.2 Montage**

Le four utilisé est celui du montage de l'essai d'injection. Un schéma en est donné à la figure (3.6). Plusieurs thermocouples K ont été placés à différents endroits des lopins pour suivre l'évolution de la température d'une part et d'autre part, un thermocouple de type K a été placé dans le four et près de la surface pour mesurer la température du four. C'est ce dernier qui sert de consigne au cours du réchauffage avant l'injection. Un deuxième thermocouple est placé dans le matériau, prêt de la surface. Les lopins d'aluminium utilisés sont en A356 ayant 25mm de diamètre et

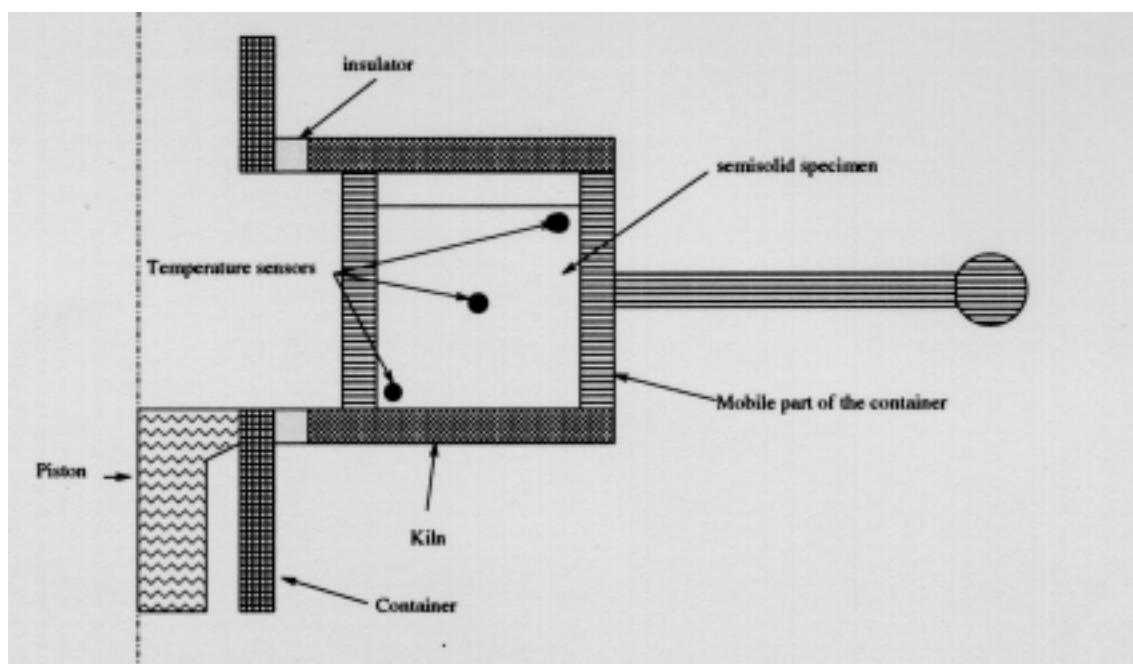


FIG. 3.6 – Schéma du montage du dispositif de chauffage : position des thermocouples dans le lopin

45mm de hauteur. Un autre thermocouple est placé au centre du lopin. Il permet donc de donner une estimation du temps de diffusion de la température à l'intérieur du matériau par conduction thermique. Enfin, à cause de la structure particulière de notre four, la zone de surface libre supérieure est la moins chaude du lopin et, un thermocouple y a été placé. Aussi, l'évolution de sa température par rapport à celle des autres points expérimentaux permet de connaître le temps nécessaire pour avoir dans le lingot une température homogène dans l'intervalle de solidification. Toutes ces températures sont prélevées à l'aide d'un enregistreur soigneusement calibré.

### 3.4.3 Résultats

La courbe de chauffage (figure 3.7) montre qu'on a une différence de température de quelques degrés entre la consigne et le lopin. Ce saut de température observé à l'interface et qui est dû à la lubrification et au fait que le contact n'est pas parfait entre les deux corps, servira à l'estimation du coefficient d'échange thermique à l'interface. Ce décalage entre la consigne et la température réelle du lopin sera pris en compte au moment des injections pour la régulation de la température du matériau. Cette figure nous montre aussi que le temps de montée de la température du lopin jusqu'à l'intervalle de solidification est assez rapide : deux minutes environ. Ce temps constitue en effet le temps nécessaire pour avoir une température homogène dans le matériau semi-solide égale à celle de sa surface. Ce temps est une propriété du matériau injecté, car il est intimement lié à la diffusivité thermique du matériau, c'est-à-dire à sa capacité à conduire plus ou moins vite la chaleur. La durée totale du



chauffage étant la somme des temps de montée en température jusqu'à l'intervalle semi-solide et du temps de maintien isotherme à l'état semi-solide, l'étape suivante est alors le maintien isotherme du lopin dans son intervalle de solidification. En fonction des informations obtenues de la bibliographie [82], le temps de maintien isotherme nécessaire pour obtenir une structure globulaire fine d'un lingot A356 thixotrope est d'environ dix minutes, au delà, la croissance des germes commence. C'est également à peu près le même temps qu'on observe chez le partenaire industriel STAMPAL (durée totale du cycle de 11 minutes environ). Aussi, au cours de nos essais, nous avons pris dix minutes comme temps de maintien isotherme, ce qui, additionné au temps  $t_m$  de montée en température de l'état semi-solide, nous donne le temps  $t_r$  de la refusion partielle.

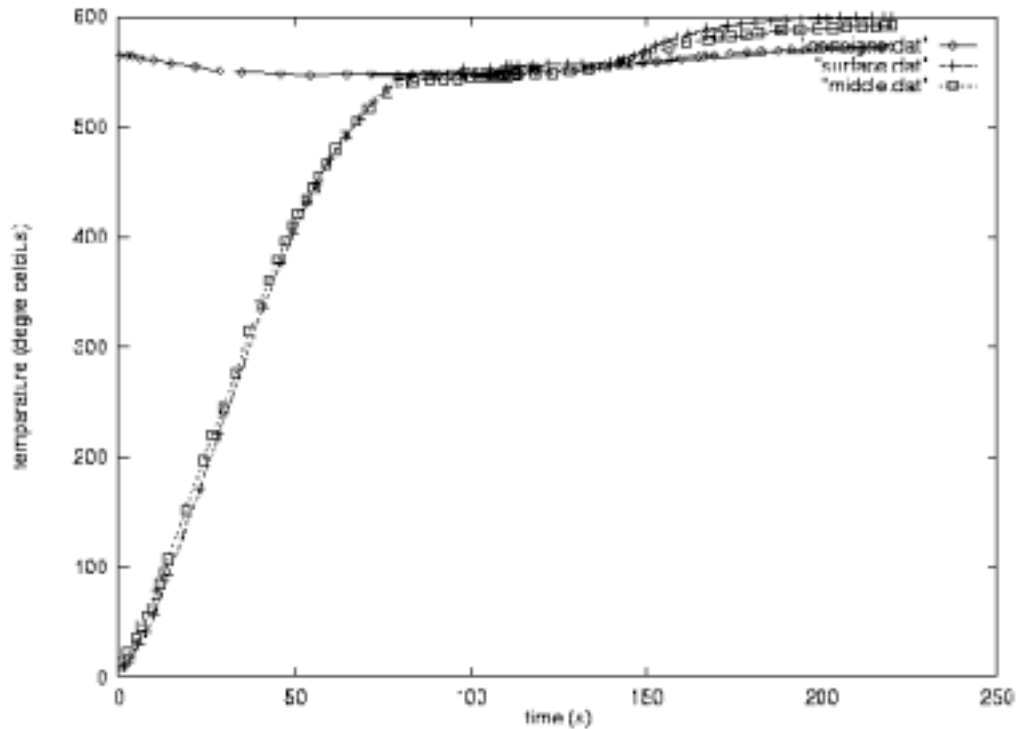


FIG. 3.7 – Courbes d'évolution de la température en différents points du lopin de matière au cours du réchauffage

A ce stade, on peut dire qu'il eût été utile et intéressant de comparer les microstructures des alliages A356 après chauffage par induction chez STAMPAL à celles des mêmes alliages après chauffage par conduction dans notre laboratoire et avec notre montage. Ainsi, la comparaison des microstructures aurait constitué une des étapes naturelles de validation de la refusion partielle des lopins de notre expérience. Ceci n'a pas pu être fait faute de temps. Néanmoins, comme on le verra

au paragraphe suivant, cette validation s'est faite a posteriori par comparaison des microstructures des pièces injectées. Pour l'estimation du coefficient d'échange thermique, on s'est servi de la mesure du saut de température à l'interface des deux matériaux.

### 3.4.4 Comparaison qualitative avec des simulation Forge2

Des simulations ont été faites pour estimer d'une part le temps de chauffage du matériau et d'autre part le coefficient d'échange thermique entre le matériau semi-solide et le four. Aussi, au cours de ces simulations, nous n'avons fait aucun calcul mécanique (figure 3.8). Le matériau a une température initiale égale à la température ambiante alors que la température du four est réglée à  $575^{\circ}\text{C}$ . Cette étape n'a malheureusement pas pu être menée de manière très précise, c'est-à-dire avec prélèvement expérimental de plusieurs valeurs de température sur les parois du four et sur les parois du matériau thixotrope en refusion partielle. Il faut aussi ajouter une difficulté expérimentale qui est due au fait que les thermocouples bougent à l'intérieur du lingot une fois que la température de celui-ci est dans l'intervalle de solidification. Néanmoins, nos travaux nous ont permis d'effectuer une mesure nous donnant une estimation réaliste de l'évolution de la température à l'intérieur du lingot et de l'ordre de grandeur du coefficient d'échange thermique à l'interface moule/matériau.

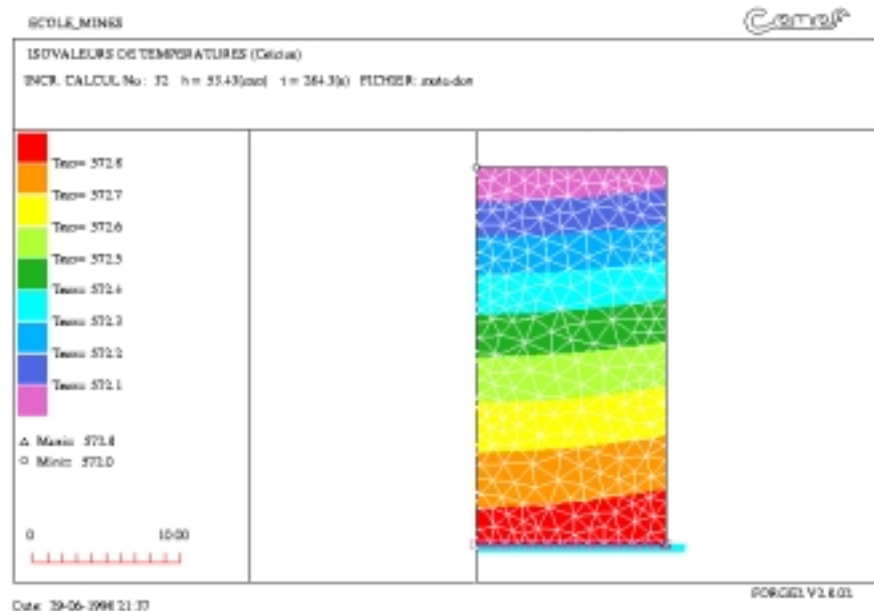


FIG. 3.8 – Evolution de la température à l'intérieur du matériau

### 3.4.5 Conclusion

Ces expériences de refusion partielle nous ont permis de déterminer le temps de la refusion pour notre mode de chauffage : le chauffage par conduction. Le point critique ici est l'évaluation du temps de montée à la température de régulation. Toutefois, ce temps est fortement dépendant des propriétés thermiques du lubrifiant utilisé : si le lubrifiant est un isolant thermique, il sera plus long et si, a contrario, ce dernier est un bon conducteur de chaleur, on aura un temps de montée en température très rapide. Ceci est également valable pour le coefficient d'échange thermique à l'interface. Cette étape de chauffage nous a également permis d'utiliser la simulation numérique pour valider l'estimation du coefficient d'échange à l'interface des deux matériaux, estimation qui, pour l'instant, s'avère être assez proche de la réalité. La valeur approchée du coefficient d'échange thermique est de  $500 W.m^{-2}.K^{-1}$ . Nous verrons que pour l'injection nous avons trouvé pour ce même coefficient la valeur de 1000.

## 3.5 Expériences d'injection

### 3.5.1 Conditions expérimentales

Au paragraphe précédent, on a déterminé les paramètres de la refusion partielle de nos "lingots thixotropes". Aussi, ce paragraphe est consacré aux expériences d'injection et à l'analyse des résultats obtenus. Pour les expériences d'injection, le four, le piston et le moule ont été lubrifiés avec des lubrifiants fournis par STAMPAL. Les températures du four et du moule sont régulées à l'aide de thermocouples K placés dans le four et dans le moule. Le moule est chauffé par des cartouches chauffantes. Le déplacement du piston est commandé par un vérin et des efforts sont mesurés à l'aide d'une cellule placée dans la partie supérieure du moule. Les essais ont été réalisés pour des températures de  $575^{\circ}C$ ,  $580^{\circ}C$ ,  $585^{\circ}C$  et pour des vitesses d'injection de  $80 mm/s$  et  $160 mm/s$ . Les épaisseurs du moule valaient respectivement  $2 mm$  et  $4 mm$ .

### 3.5.2 Les pièces injectées

Dans un premier temps, les expériences que nous avons faites nous ont permis de mesurer la difficulté de réaliser des injections en laboratoire. Les premières pièces injectées présentaient des défauts de symétrie importants comme on peut le voir sur la figure (3.10). Ceci était dû à des problèmes de lubrification et de positionnement des différentes parties du montage. En effet, dans le premier montage que nous avons utilisé, la position du chauffage était dans l'alignement du conduit d'injection. Ceci a généré de nombreux problèmes : dilatation du piston en cuivre qui à chaud ne coulissait plus dans le canal, non axisymétrie des pièces, etc. C'est ce qui nous a amené à concevoir et à réaliser un nouveau montage expérimental, avec l'aide de Gilbert Fiorucci, Francis Fournier et Marc Bouissou. Grâce à ce nouveau

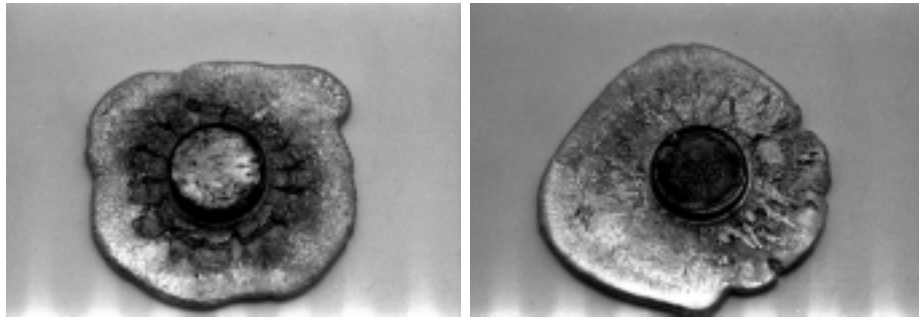


FIG. 3.9 – Vue des fissures sur les pièces injectées

montage, nous avons réussi à obtenir des pièces de meilleure qualité (figure 3.11). Ces dernières figures montrent que les pièces injectées sont axisymétriques et ne présentent pas de fissures visibles à l'oeil nu.

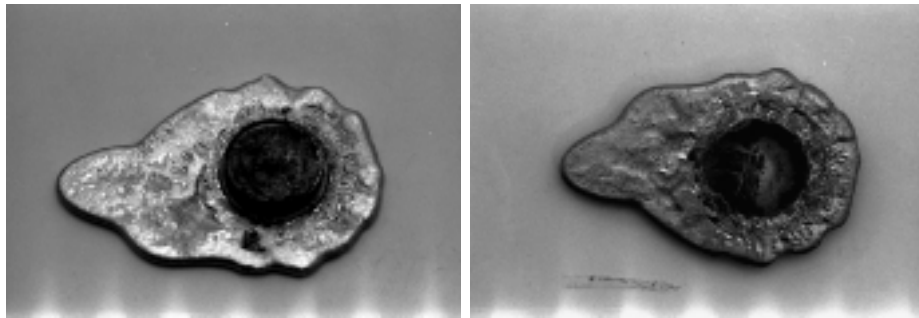


FIG. 3.10 – Vue des défauts de symétrie sur les premières séries de pièces injectés

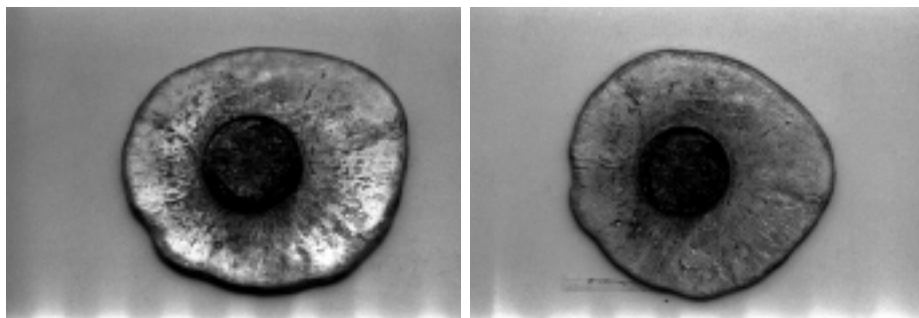


FIG. 3.11 – Vue de deux pièces injectées après modification du montage

### 3.5.3 Microstructure des pièces injectées

L'analyse microstructurale des pièces injectées et trempées après démoulage à chaud montre que la microstructure n'est pas très homogène après injection. Dans

la zone constituée du reste du lopin injecté (le talon), on observe une densification des particules solides à faible vitesse d'injection, ce qui est conforme avec les connaissances bibliographiques sur le procédé. En effet, à faible vitesse d'injection (80mm/s), la ségrégation du liquide est favorisée par la lenteur du procédé (figure 3.13). On a alors une densification des particules solides et l'expulsion du liquide. C'est ce qui a par exemple été observé au laboratoire de l'institut polytechnique de Grenoble au cours d'essais de filage arrière [82][53], ou encore au CEMEF dans le cas de filage avant d'éprouvettes en Sn-Pb [6][33].

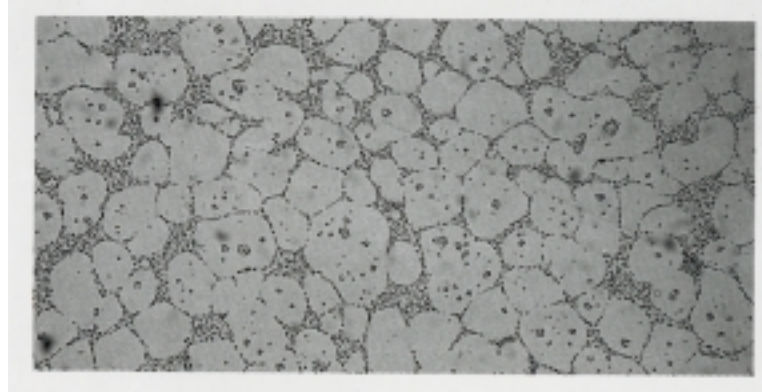


FIG. 3.12 – Microstructure d'un lopin d'A356 avant injection

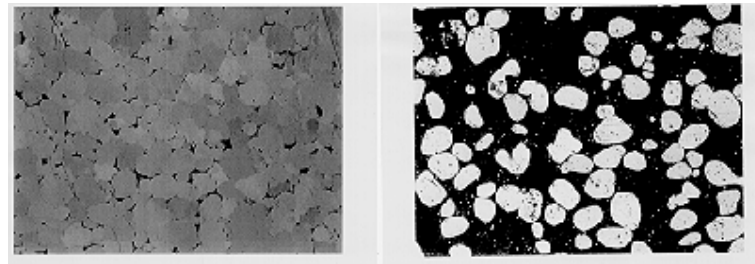


FIG. 3.13 – Microstructure d'un lopin injecté à 80mm/s, à gauche talon restant après injection et à droite partie injectée

Dans les zones les plus éloignées du point d'injection, on observe une déformation très importante des globules par rapport à l'état initial pour une épaisseur du moule de 2mm et une vitesse de 80mm/s pour le piston. Ces figures montrent également que la ségrégation du liquide est importante, ce qui est en accord avec l'existence d'une épaisseur limite pour la mise en forme observée chez STAMPAL.

De manière générale, l'observation des analyses microstructurales des pièces injectées au CEMEF montre que la déformation des globules est semblable à celle observée sur les pièces industrielles injectées dans le cadre du projet ADFORM. On observe en outre que les microstructures sont semblables, ce qui permet de valider a posteriori l'étape de refusion partielle des lopins.

### 3.5.4 Analyse des courbes d'injection

On a un écoulement axisymétrique, ceci à cause du bon état de surface du moule et de sa bonne orthogonalité avec le piston. Les lopins injectés présentent généralement un bon état de surface, sans fissures apparentes. Toutefois, à de faibles vitesses d'injection, on observe des fissures (figure 3.9), à cause de la solidification précoce de la phase solide. Ce phénomène est particulièrement visible sur certains lopins injectés où l'on observe deux phases dans l'écoulement : une première phase dans laquelle on suppose que la phase liquide de la gelée est plus importante, et la seconde phase, dans laquelle on suppose qu'on a une agglomération de particules solides. C'est le phénomène d'essorage. Ceci est dû soit à un mauvais contrôle de la température des lopins semi-solides, soit à une faible vitesse d'injection. En plus, la vitesse de cisaillement dans notre cas, qui est d'environ  $6s^{-1}$ , semble être plus faible que les vitesses généralement appliquées pour le thixoformage. Les courbes injectées font apparaître deux parties dans le comportement du matériau : une première partie au cours de laquelle le niveau de la force est faible, le point 0 correspondant au moment où le matériau touche la partie supérieure du moule. La gelée semi-solide s'écoule alors dans le moule sans grande résistance (figure 3.14) .

Une seconde partie au cours de laquelle la force croît de manière importante, ce qui correspond à l'influence du transfert thermique à l'interface. A cause du refroidissement du matériau dans le moule, on a des régions de l'écoulement qui ont une viscosité importante. Cela se traduit par une augmentation de la déformation, c'est à dire de la force d'injection. Ceci montre que la viscosité d'un matériau semi-solide décroît toujours avec l'augmentation de la température. Toutes les courbes montrent l'importance de la température dans l'écoulement. De manière logique, cette influence est importante lorsque la vitesse de l'écoulement est faible et lorsque les parois du moule sont minces.

#### Effet de la température initiale de l'alliage

Les courbes d'injection montrent que la force est très fortement dépendante de la température initiale de la gelée (température de réchauffage). A condition d'injection égales par ailleurs, lorsqu'on augmente la température de réchauffage de la gelée, la force d'injection diminue.

De même, pour une épaisseur du moule de 2 mm et une vitesse d'injection de 160 mm/s, on observe le même phénomène (figure 3.16). On remarque également qu'une diminution de l'épaisseur du moule se traduit par une augmentation de la force d'injection.

#### Effet de la vitesse d'injection

En comparant les figures 3.14 à 3.16, on peut remarquer que pour une même température, la courbe d'effort enregistrée est plus importante pour les expériences faites avec une vitesse d'injection plus faible. Ce qui veut dire que lorsque la vitesse augmente, on a une diminution de l'effort. Ceci peut apparaître à première vue

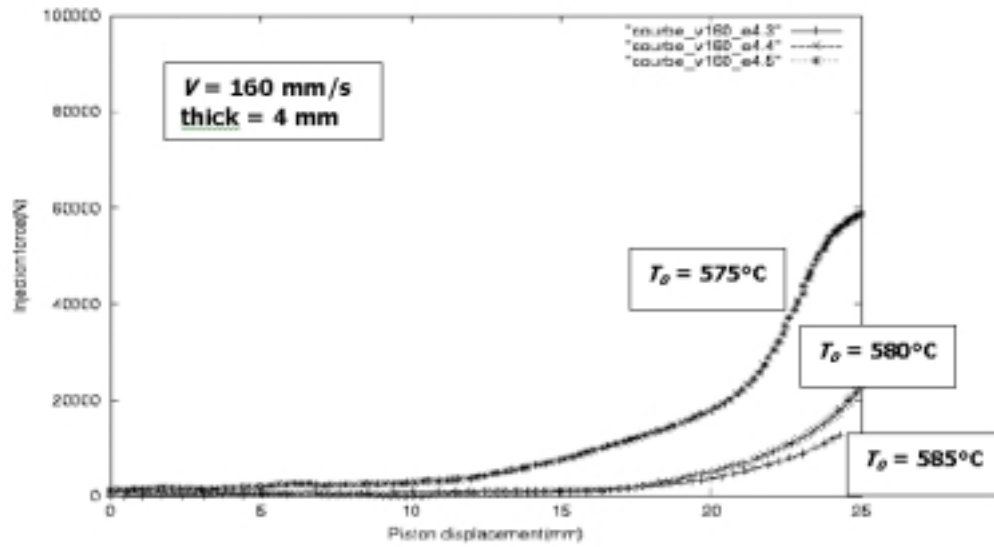


FIG. 3.14 – Résultat expérimental : effet de la variation de la température initiale pour une épaisseur du moule de 4 mm et une vitesse d'injection de 160 mm/s

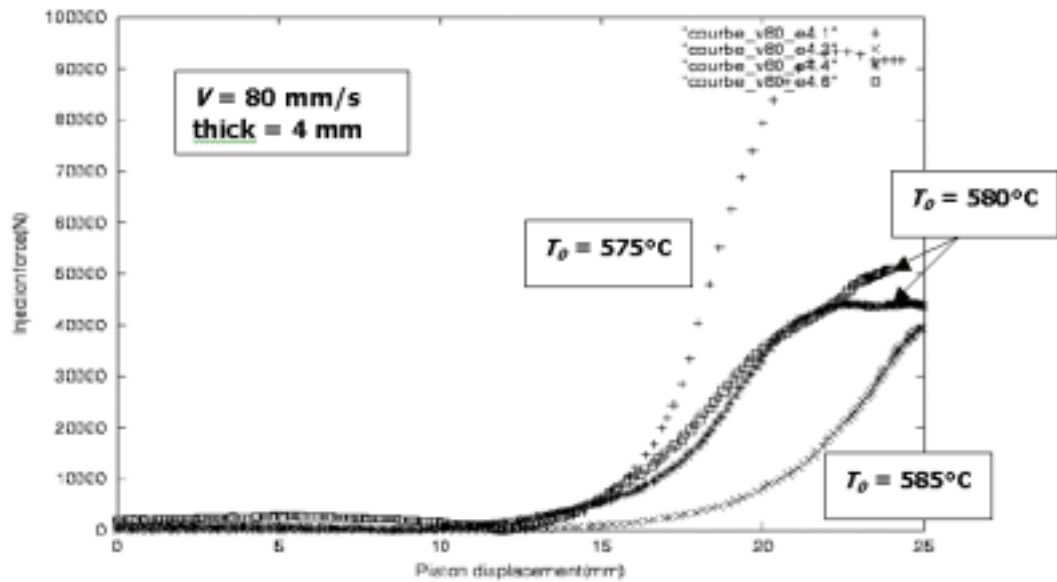


FIG. 3.15 – Résultat expérimental : effet de la variation de la température initiale pour une épaisseur du moule de 4 mm et une vitesse d'injection de 80 mm/s

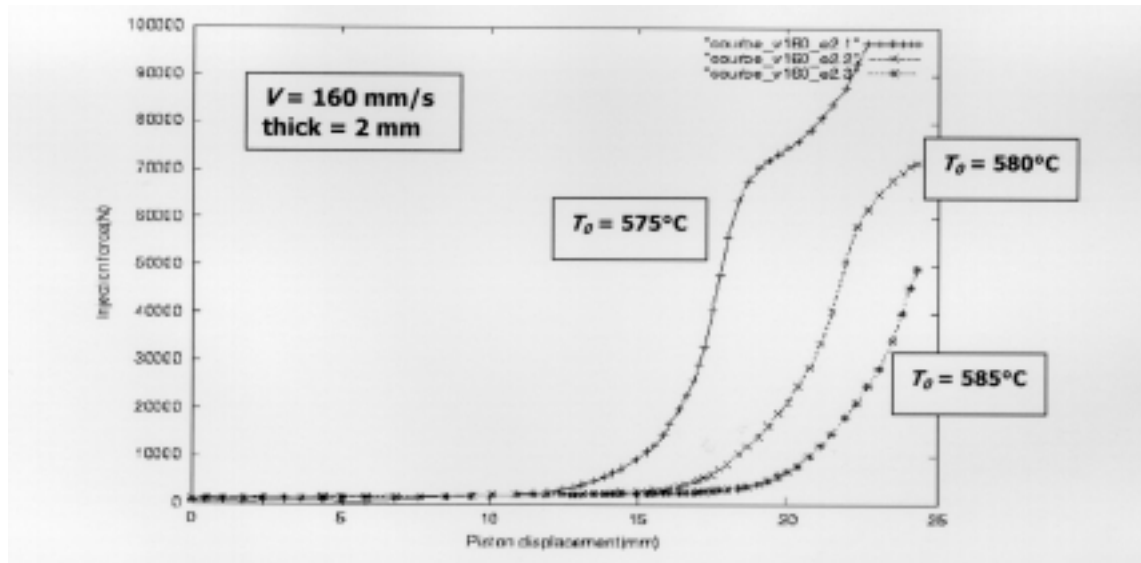


FIG. 3.16 – Résultat expérimental : effet de la variation de la température initiale pour une épaisseur du moule de 2 mm et une vitesse d'injection de 160 mm/s

contradictoire mais peut s'expliquer par le transfert thermique entre le matériau semi-solide et le moule pendant l'essai. En effet on constate que l'évolution de la force au cours des tests se fait en deux étapes :

Une première étape au cours de laquelle la valeur de la force est relativement faible, le matériau présentant alors une résistance relativement faible à l'écoulement.

Une seconde étape au cours de laquelle on observe une forte augmentation de la force. Ceci est dû à l'influence du transfert thermique. Le matériau est refroidi par le moule. Certaines régions du fluide voient leur viscosité augmenter, ce qui provoque une augmentation de la force d'injection. Ceci est en accord avec les résultats connus dans la bibliographie. La viscosité apparente des matériaux semi-solides est toujours considérée comme une fonction décroissante de la température. Dans tous les cas, on observe très nettement l'influence de la température. Cette influence est renforcée lorsque la vitesse du fluide est plus faible et aussi lorsque l'épaisseur du moule est plus faible (figure 3.16). Ceci est assez logique, car dans ces conditions, la chaleur dissipée par le lopin est plus importante. Les injections avec variation de l'épaisseur montrent que la force d'injection évolue lorsque l'épaisseur diminue. Le taux de déformation est dans ce cas plus important, ce qui cause une augmentation de la puissance de déformation et donc de la force d'injection. Cet effet est compatible avec l'utilisation d'une loi puissance type viscoplastique. En plus, si on compare les trois courbes, on peut noter que la différence entre les deux principales étapes de l'évolution de la force d'injection est favorisée par la décroissance de la vitesse de l'écoulement et de l'épaisseur du moule. Ceci est encore une illustration du rôle important du transfert de chaleur, qui sera confirmé par les simulations éléments finis avec Forge2.



## 3.6 Identification des paramètres rhéologiques

Les sciences de l'ingénieur ont permis la description du comportement de systèmes physiques par des modèles mathématiques. Si on considère le cas de notre expérience de caractérisation rhéologique, les données expérimentales enregistrées (force d'injection en fonction de l'amplitude de déplacement du piston), permettent de définir de manière globale l'évolution du comportement du matériau en fonction des déformations qu'il subit. L'objectif principal est alors la prévision de la réponse du matériau lorsque l'on fait varier les conditions expérimentales (changement de l'état initial). C'est ce qu'on appelle aussi problème direct en identification. Ainsi, lorsque le modèle du système est connu, l'objectif est la détermination des paramètres pour lesquels on obtient une réponse satisfaisante du système. Ce qui signifie la détermination d'un ensemble de données (paramètres de la loi) telles que les valeurs données par le modèle soient le plus proche possible des valeurs expérimentales. C'est cette approche que nous avons utilisée pour déterminer les paramètres rhéologiques du matériau.

### 3.6.1 Evolution des paramètres viscoplastiques dans l'intervalle de solidification

Selon la littérature [124] [68], l'évolution qualitative des coefficients  $K$  (consistance) et  $m$  (sensibilité à la vitesse de déformation) avec la température dans l'intervalle de solidification est connue. Elle peut être schématisée par la figure 3.17.

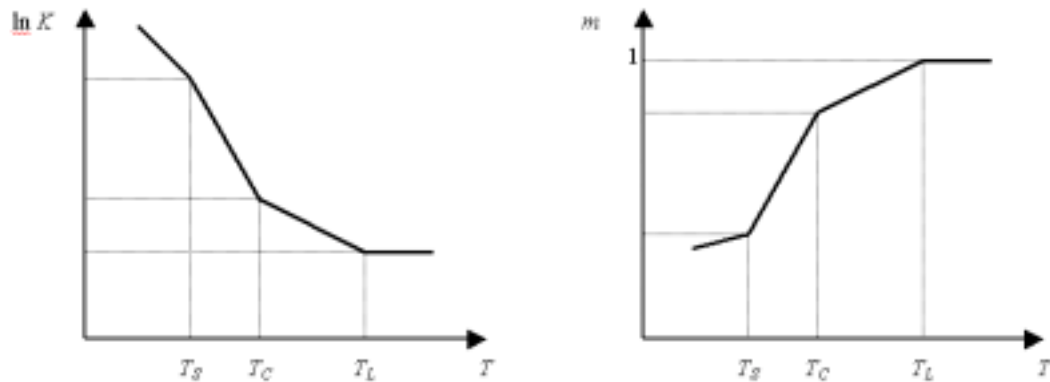


FIG. 3.17 – Evolution de la consistance et de la sensibilité à la vitesse de déformation

Dans l'intervalle de solidification, quand la température décroît, on observe l'augmentation de la consistance  $K$  de plusieurs ordres de grandeur, de sa valeur à l'état liquide ( $K$  est alors égal à la viscosité dynamique) jusqu'à sa valeur à l'état solide. Le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation décroît également de 1 (valeur à l'état liquide) à environ 0.2 (valeur à l'état solide), lorsque la température décroît. A l'état semi-solide, il existe une température critique  $T_C$

appelée température de cohérence en dessous de laquelle le matériau semi-solide a un squelette solide constitué. Le matériau, dont le comportement au dessus de la température critique  $T_c$  est celui d'un fluide avec des particules solides en suspension, change de comportement pour celui d'un solide saturé de liquide. C'est pourquoi, en dessous de cette température, la viscosité apparente augmente et dépend de plus en plus de la vitesse de déformation. Lorsque le matériau semi-solide s'écoule, sa température et sa vitesse de déformation varient. Ainsi, dans notre essai d'injection, la variation de la viscosité apparente dans l'intervalle de solidification provoque-t-elle une variation de la force d'injection. La mesure de la force d'injection à différentes vitesses et à différentes températures devrait donc permettre de mesurer la variation des paramètres  $K$  et  $m$  en fonction de la température. La figure (3.18) montre la variation schématisée attendue de la viscosité apparente lorsque la vitesse de déformation augmente, pour une température donnée. Elle met en évidence le caractère rhéofluidifiant de la gelée semi-solide et, d'une manière générale, elle montre que pour un comportement viscoplastique, une augmentation de la vitesse de déformation à une température donnée se traduit par une diminution de la viscosité (figure de gauche). De même, pour une vitesse de déformation donnée, on constate une augmentation de la viscosité lorsque la température diminue.

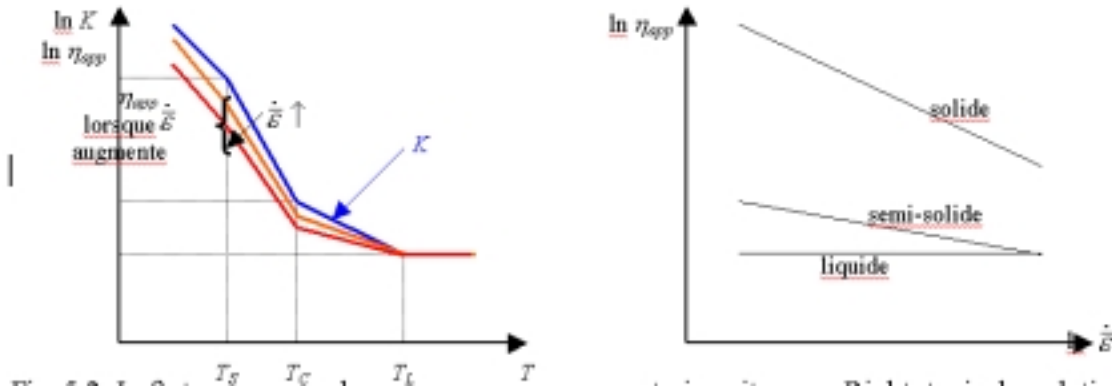


FIG. 3.18 – Variations schématisées de la viscosité apparente  $\eta_{app} = K(\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{m-1}$  en fonction de la température et de la vitesse de déformation

### 3.6.2 Simulation numérique de l'expérience

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats de simulations numériques 2D effectuées avec un ensemble de paramètres  $K$  et  $m$ , pour illustrer la capacité du code de calcul à modéliser notre expérience, et donc la possibilité de s'en servir pour procéder à l'identification des paramètres rhéologiques. Aussi, pour réaliser les simulations, la première étape a été la définition de l'outillage. Nous avons utilisé le fait

que le montage est axisymétrique pour faire le calcul en 2D, dans un plan  $(r, z)$ , à l'aide du logiciel Forge2 (figures 3.19 à 3.21). Le lopin, placé à la position correspondant au début de la compression est finement maillé et sa température initiale est homogène fixée à celle des différentes injections expérimentales réalisées. Le moule est constitué d'un outil non déformable dont la température est fixée à celle du moule expérimental. Les premiers résultats des simulations nous montrent l'évolution de la température à l'intérieur du matériau. On constate une forte dépendance à la température initiale et au coefficient d'échange thermique. Aussi, pour certaines valeurs, on constate que la température du matériau sort de son intervalle de solidification. En ce qui concerne la courbe de variation de la force en fonction du déplacement du piston, on constate que celle-ci a sensiblement la même forme que les courbes expérimentales. Une augmentation de la consistance conjuguée à une diminution du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation a pour conséquence d'accentuer la convexité de la courbe. C'est pourquoi nous avons décidé de rechercher les paramètres  $K$  (consistance) et  $m$  (sensibilité à la vitesse de déformation) de la loi sous forme tabulée, en fonction de la température.

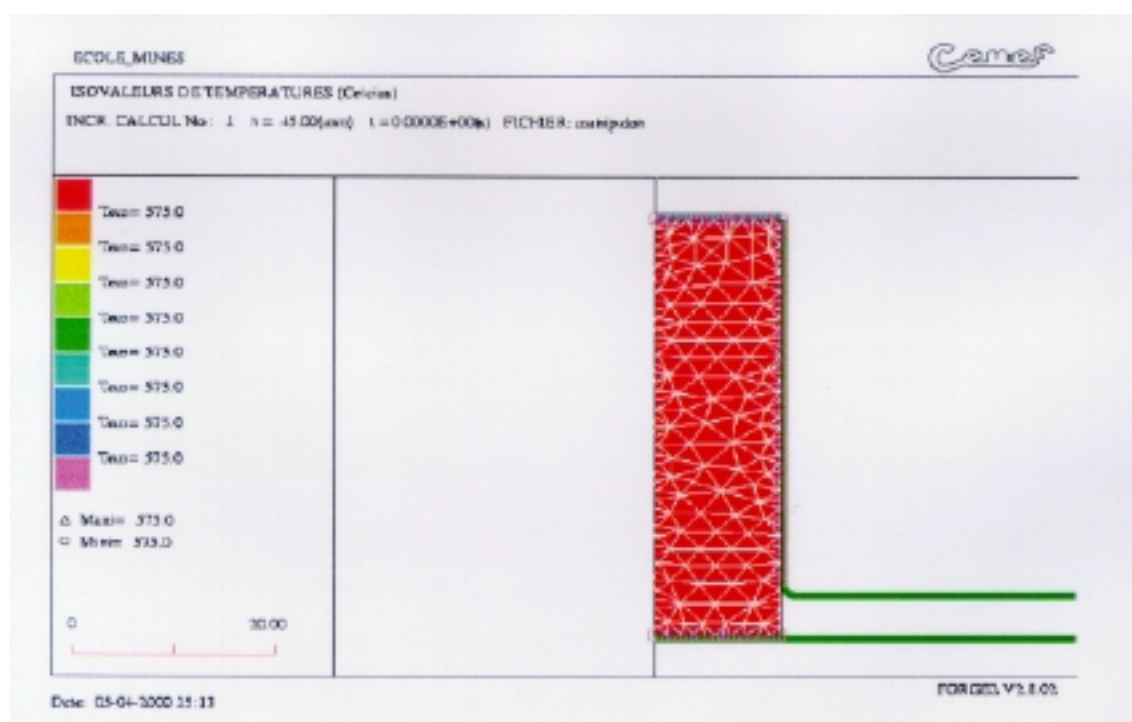


FIG. 3.19 – Simulation numérique d'une expérience d'injection avec le logiciel Forge2 : maillage initial en début d'injection

A l'inverse du procédé réel, Le piston se déplace vers le bas dans la simulation, qui commence au temps  $t = 0$  lorsque le lopin est en contact avec le disque inférieur. La courbe 3.22 présente l'allure de l'évolution de la force en fonction du déplacement du piston.

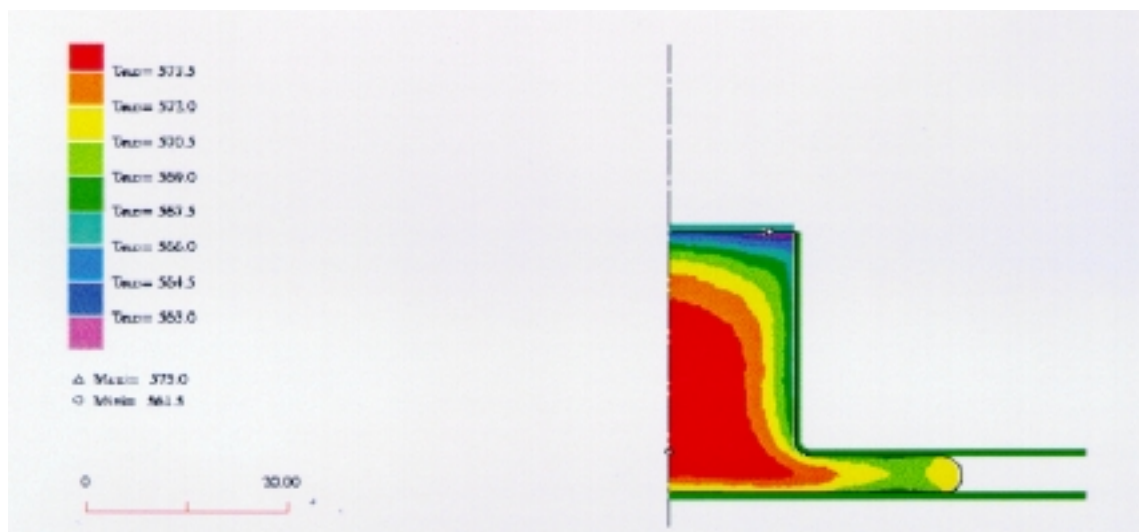


FIG. 3.20 – Simulation de l'expérience : isovaleurs de température en cours d'injection

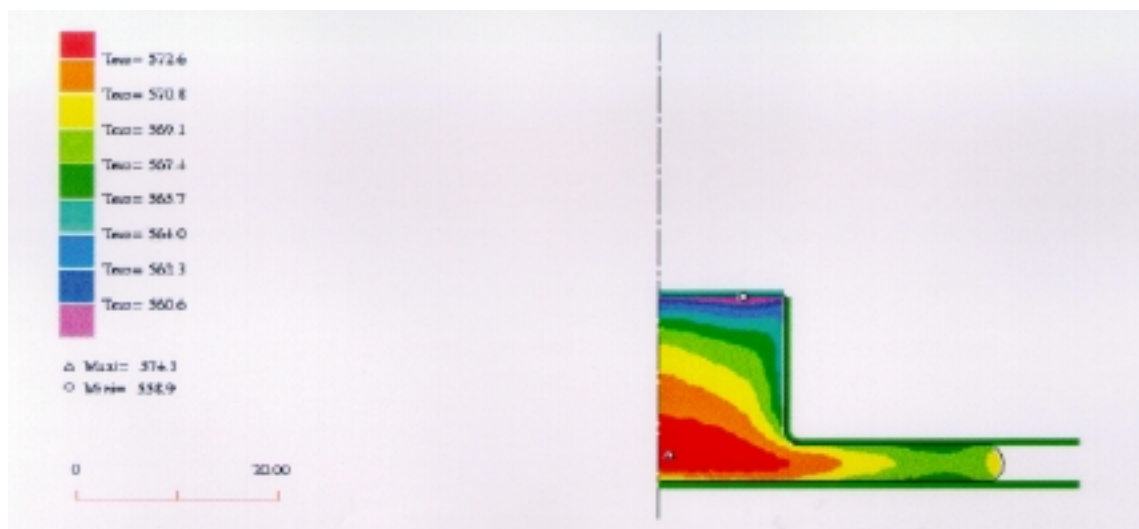


FIG. 3.21 – Simulation de l'expérience : isovaleurs de température à la fin de l'injection

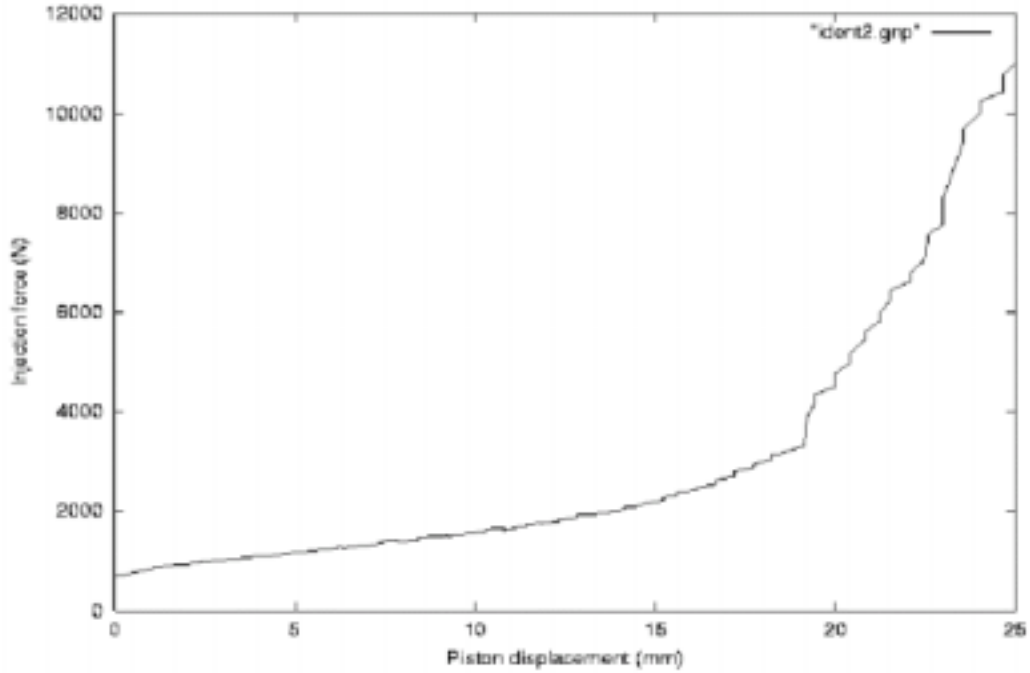


FIG. 3.22 – Courbe typique d'évolution de la force en fonction du déplacement du piston

### Détermination du coefficient d'échange thermique au cours de l'injection

Les transferts thermiques sont importants dans ce test. En effet, le coefficient d'échange thermique entre le matériau semi-solide et le moule a une grande importance sur la carte de distribution de la température, et donc sur la courbe d'effort. En comparaison avec les résultats expérimentaux, et en supposant que le matériau reste semi-solide au cours du test, le coefficient d'échange thermique a été calibré à une valeur de  $h = 1000 W.m^{-2}.K^{-1}$ . On peut noter que dans la version de Forge2 utilisée, il n'y a pas de résolution des équations thermiques dans les outils. En conséquence, le flux de chaleur du matériau semi-solide est égal à  $\phi = h(T - T_{outil})$ , où  $T_{outil}$  est la température de l'outil, qui est supposée constante et égale à la température de chauffage du moule ( $220^{\circ}C$ ). Ceci veut dire que la valeur de  $h$  utilisée dans la simulation est sous-estimée, lorsque la température de surface du moule augmente. Une fois cette calibration thermique effectuée, on peut voir figures 3.20 et 3.21 que le profil de température est raisonnable.

Comme illustré par la figure 3.22, l'évolution de la force est alors représentative de ce qui est enregistré sur le test expérimental. L'effort reste faible durant une bonne partie de la course du piston, et augmente ensuite. Cette évolution est due au refroidissement du matériau semi-solide, celui-ci devenant de plus en plus solide, sa viscosité augmente, et donc la force appliquée sur le piston.

On peut conclure que l'évolution de la force est fortement influencée par les paramètres gouvernant la forme des courbes  $K(T)$  et  $m(T)$  figure 3.17. Ceci rend pos-

sible l'identification de ces paramètres par minimisation de l'erreur entre l'évolution des courbes de force expérimentales et simulées.

### 3.6.3 Détermination des paramètres rhéologiques de la loi

#### Identification des paramètres rhéologiques à l'aide de Forge2

Les paramètres que nous avons décidé d'identifier sont la consistance  $K$  du matériau et le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$ , en un certain nombre de points de l'intervalle de solidification. Pour cela, nous avons pris un point avant le solidus de l'alliage ( $545^{\circ}C$ ), trois points entre le solidus de l'alliage et l'eutectique ( $572^{\circ}C$ ), et deux points entre l'eutectique et le liquidus de l'alliage ( $615^{\circ}C$ ). Ainsi, nous avons pris des points dans toutes les zones critiques du chemin de solidification de l'alliage telle que présentées sur la figure 3.18. L'identification à l'aide du logiciel Forge2 s'est faite en utilisant une stratégie de type essai-erreur. On part d'un jeu de paramètres initiaux, et on étudie la sensibilité de la force aux variations de tous les paramètres. Ensuite, on affine le jeu de paramètres de manière à obtenir des résultats le plus proche possible des expériences. Les figures 3.23 à 3.25 présentent la comparaison entre les courbes expérimentales d'injection et les simulations.

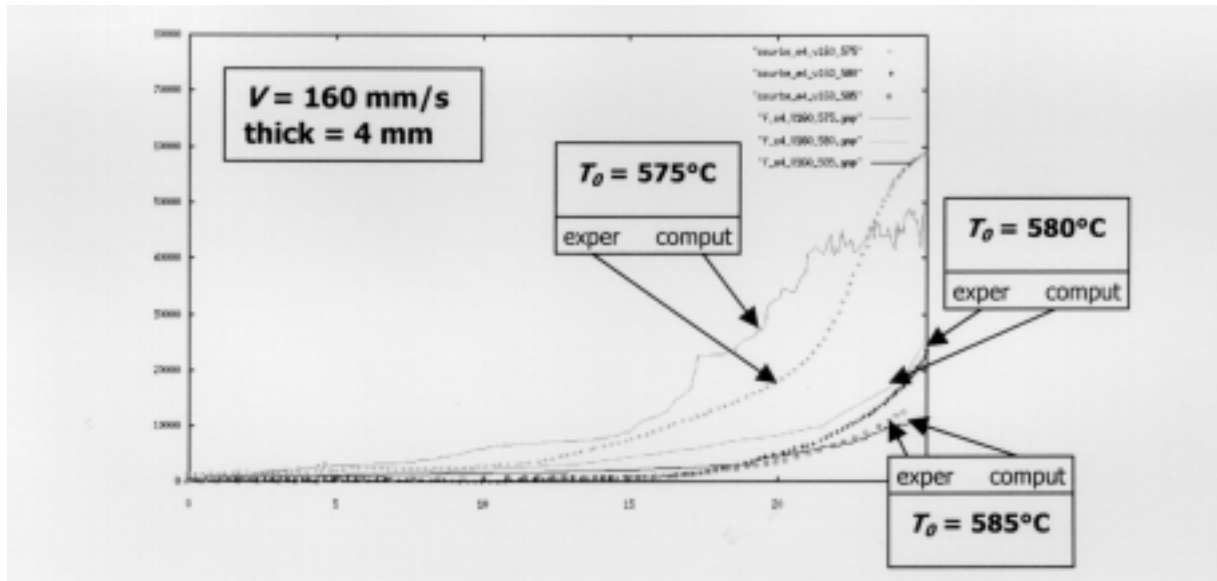


FIG. 3.23 – Comparaisons des courbes expérimentales et simulées pour une vitesse de 160mm/s et une épaisseur du moule de 4mm

Elles montrent qu'on a un accord raisonnable. En prenant en compte la complexité de ce test rhéologique (écoulement complexe, couplage thermique), ceci est très satisfaisant. Toutes les caractéristiques importantes des courbes d'effort sont reproduites correctement : la valeur de la force au début et à la fin de l'injection, le temps de transition entre les deux régimes, la vitesse d'accroissement de

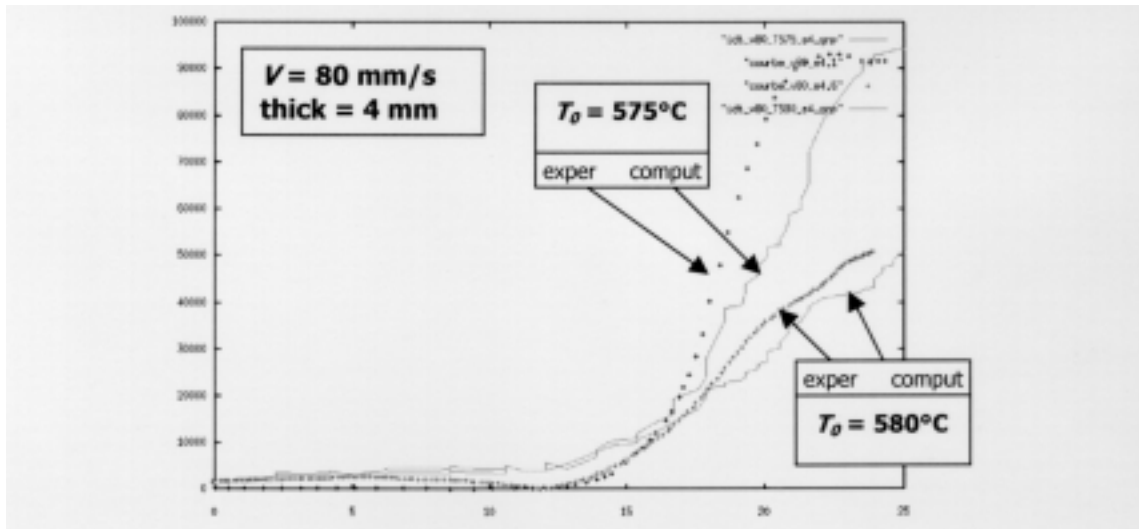


FIG. 3.24 – Comparaisons des courbes expérimentales et simulées pour une vitesse de  $80 \text{ mm/s}$  et une épaisseur du moule de  $4 \text{ mm}$

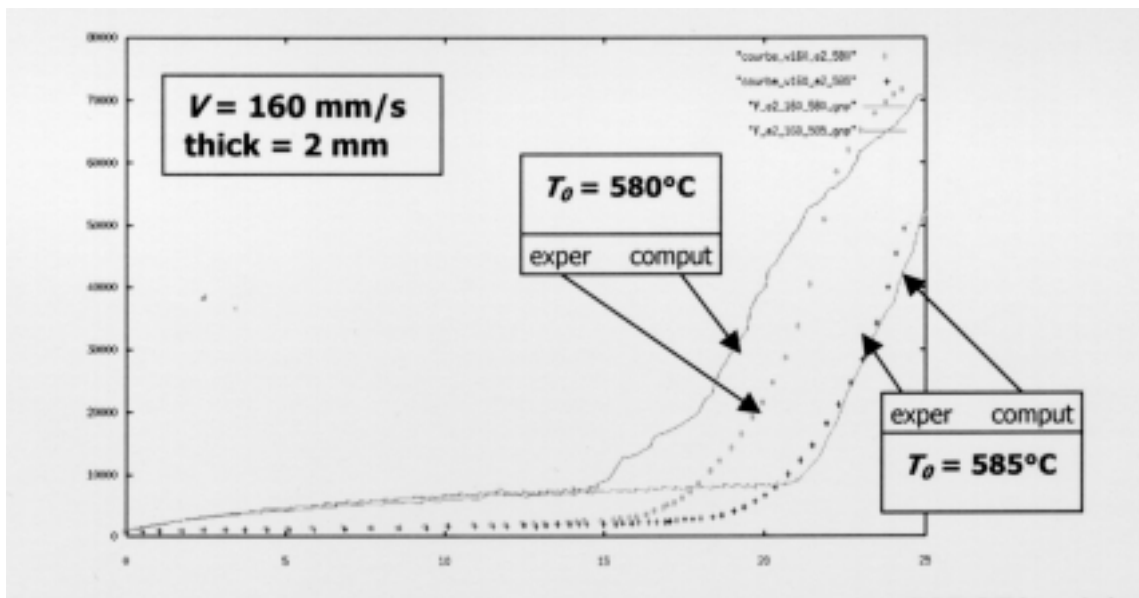


FIG. 3.25 – Comparaisons des courbes expérimentales et simulées pour une vitesse de  $160 \text{ mm/s}$  et une épaisseur du moule de  $2 \text{ mm}$

la force. Ceci montre que l'identification est assez bonne. Les valeurs de  $K$  et  $m$  identifiées sont résumées sur la table suivante. Leur dépendance par rapport à la température est donnée par les figures 3.26 et 3.27. Les figures 3.29 et 3.28 donnent la dépendance de la viscosité apparente par rapport à la vitesse de déformation et à la température. Notons enfin que la valeur à  $540^{\circ}\text{C}$  n'a pas été identifiée dans ce travail, la solidification complète n'étant pas atteinte au cours de l'essai. Cette remarque est également valable pour les températures au dessus de  $585^{\circ}\text{C}$ , qui est la plus haute température du matériau semi-solide que nous avons considérée.

$T(^{\circ}\text{C})$	540	560	567	570	585	600	620
$K(\text{Pa.s}^m)$	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^5$	20	0.1	0.001
$m$	0.2	0.2	0.3	0.4	0.9	1	1.0

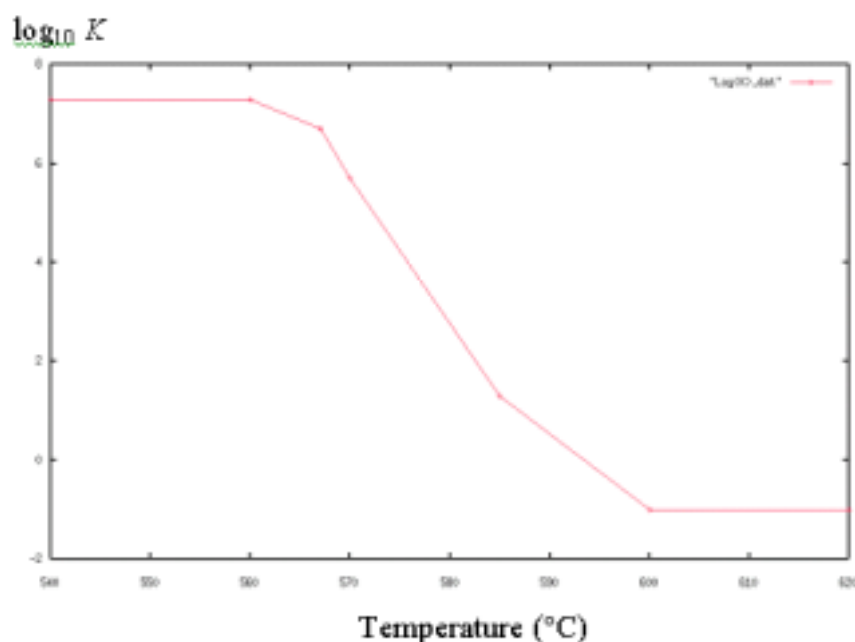


FIG. 3.26 – Représentation graphique de la variation de  $K$  en fonction de la température

### 3.7 Conclusion

Après une étude bibliographique sur le comportement des métaux à l'état semi-solide qui nous a permis de passer en revue les différentes lois de comportement utilisées, nous avons choisi d'utiliser une loi viscoplastique. L'étape suivante a alors été la réalisation d'essais instrumentés et l'identification des paramètres de la loi. Les premières expériences que nous avons faites ont été des expériences de réchauffage des lopins. Ces expériences nous ont permis de déterminer les températures de refusion partielle des lingots pour les expériences d'injection que nous avons effectuées.



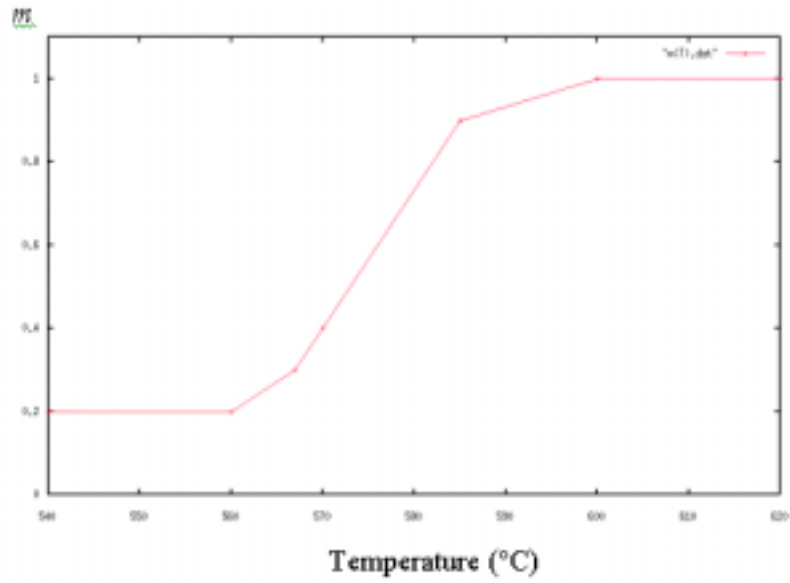


FIG. 3.27 – Représentation graphique de la variation de  $m$  en fonction de la température

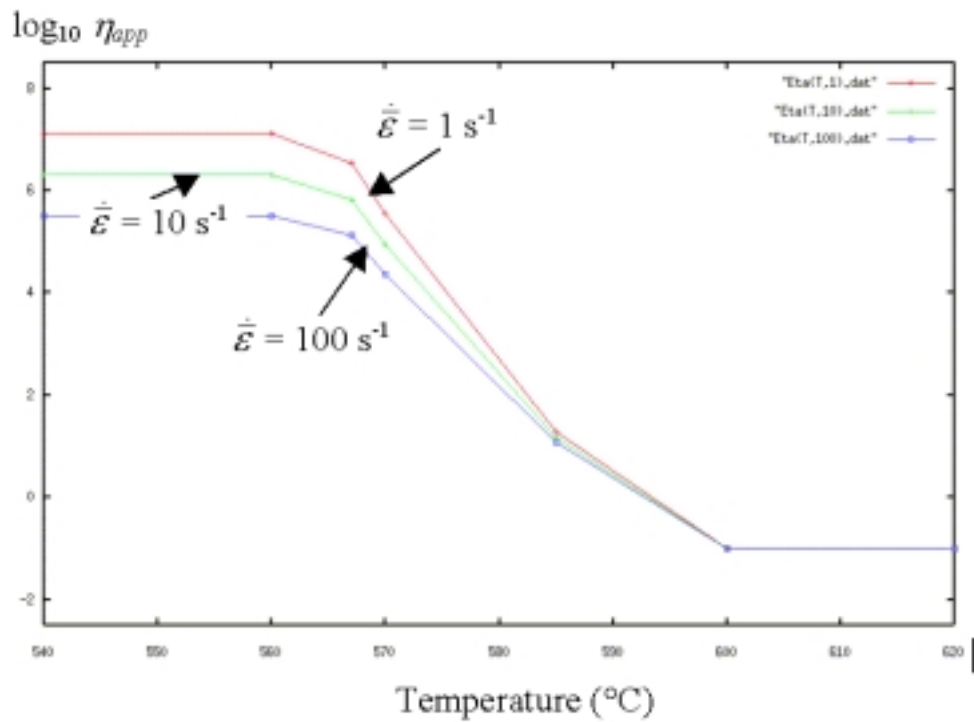


FIG. 3.28 – Variation de la viscosité apparente identifiée en fonction de la vitesse de déformation à température donnée

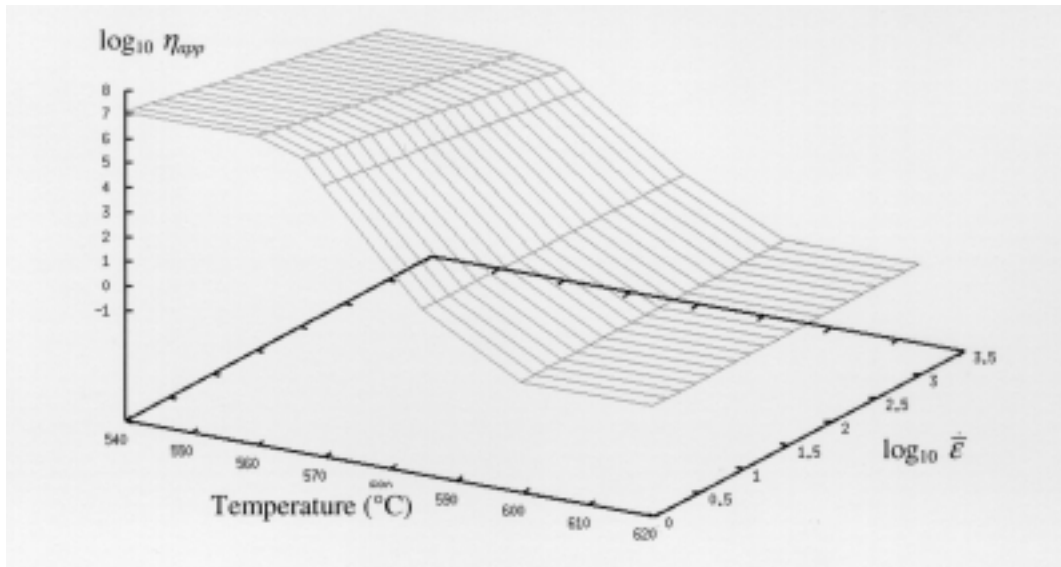


FIG. 3.29 – Evolution de la viscosité apparente identifiée en fonction de la température et de la vitesse de déformation

Les injections proprement dites nous ont permis de mettre en évidence des problèmes d'adhésion de l'aluminium fondu aux parois du moule et de non symétrie des pièces injectées. Nous avons alors été amenés à concevoir et à réaliser un nouveau montage, en corrigeant les erreurs du précédent. Ce nouveau montage nous a donné satisfaction dans la mesure où il nous a permis de réaliser les expériences dans des conditions assez bonnes. Ces expériences nous ont permis de mettre en évidence l'importance de la thermique dans le procédé. Les résultats expérimentaux ont été d'une manière générale assez satisfaisants. Nous avons alors réalisé l'identification des paramètres d'une loi viscoplastique. Ceci nous a permis de trouver pour notre cas des paramètres en concordance avec ceux trouvés dans la bibliographie et ayant un accord assez bon avec l'expérience. L'étape suivante de notre travail est alors l'adaptation de nos codes de calcul de manière à pouvoir simuler le procédé d'injection en trois dimensions.

## Chapitre 4

# FORMULATION LAGRANGIENNE POUR LE REMPLISSAGE

Nous présentons dans ce chapitre les grands principes mécaniques d'une formulation lagrangienne réactualisée, ainsi que l'écriture des équations gouvernant l'écoulement instationnaire d'un fluide visqueux et incompressible avec effet d'inertie, de gravité et de surface libre. Nous présentons ensuite la méthode de discrétisation par éléments finis utilisée pour résoudre ce problème. Pour les aspects thermiques, le lecteur intéressé peut consulter la thèse de Bahloul [5].

### 4.1 Le modèle lagrangien

Le principe des méthodes lagrangiennes est que le maillage est convecté avec la même vitesse que la matière. A chaque pas de temps, le maillage est donc réactualisé avec la vitesse matérielle, et chaque noeud du maillage est identifié à une même particule de matière tout au long de la simulation. La zone maillée correspond à celle occupée par la matière. Ce modèle a été utilisé au CEMEF en 2D par Muttin et al[94] et en dimension 3 par Bahloul[5]. Dans ce modèle de remplissage, la qualité du remaillageur automatique a une grande importance, au vue de la complexité des moules et des grandes déformations subies par le maillage. Entre autres avantages de cette formulation, on peut citer la bonne description de la surface libre du fluide, ainsi que la possibilité d'introduire aisément les effets de tension surfacique.

### 4.2 Equations d'équilibre

Sous l'hypothèse de milieu continu, le mouvement d'un fluide quelconque est régi par les principes généraux de la mécanique[12].

### 4.2.1 Equation de conservation de la masse

En appliquant le principe bien connu depuis Lavoisier "Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme", on suppose qu'au cours de l'évolution d'un système physique, il y a conservation de la masse totale.

L'équation de conservation peut alors s'écrire sous forme conservative de la façon suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

ou, sous forme non conservative :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.2)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $t$  le temps, et  $\vec{v}$  le champ de vitesse de l'écoulement.

Pour un fluide incompressible, celle-ci se réduit à :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.3)$$

### 4.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Elle traduit le principe fondamental de la dynamique qui relie la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un système isolé à l'ensemble des forces qui s'exercent sur lui. Elle s'écrit sous forme conservative de la façon suivante :

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{f} \quad (4.4)$$

ce qui donne après utilisation de (4.1) :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{f} \quad (4.5)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\vec{f}$  l'ensemble des densités massiques de forces extérieures agissant sur le système isolé.

En utilisant la relation  $\boldsymbol{\sigma} = s - pId$ , avec  $s$  tenseur déviateur des contraintes, et  $p = -\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})$  la pression hydrostatique, on obtient :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{s} - \nabla p + \rho \vec{f} \quad (4.6)$$

La loi de comportement s'écrit :

$$s = 2\eta(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.7)$$

Avec

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla^t v)$$

### 4.2.3 Le problème continu à résoudre

On supposera dans cette section que la frontière du domaine spatial  $\Omega$  se décompose en trois parties. Sur la première s'appliquent des conditions aux limites en vitesse imposée (zone d'injection), sur la deuxième des conditions aux limites de contrainte

imposée (surface libre où on applique une tension surfacique). La troisième partie correspond à la paroi en contact avec le moule sur laquelle on supposera qu'on a un contact "parfaitement glissant".

$$\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_T \cup \Gamma_c$$

$$\vec{v} = \vec{v}_d \text{ sur } \Gamma_d$$

$$\boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_d \text{ sur } \Gamma_T$$

Le problème à résoudre est alors :

*Trouver un champ de vitesse  $u$  et une pression  $p$  tels qu'on ait :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \vec{f} \text{ sur } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \vec{v} = \vec{v}_d \text{ sur } \Gamma_d \\ \boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_d \text{ sur } \Gamma_T \end{array} \right. \quad (4.8)$$

#### 4.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites constituent la traduction des interactions physiques avec le milieu extérieur. Du point de vue mathématique, elles doivent être compatibles avec la nature des équations, de manière à assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème. Du point de vue physique, elles doivent représenter au mieux le phénomène physique qu'on veut modéliser. Dans cette section, nous nous limiterons aux conditions appliquées sur la frontière définie au paragraphe précédent.

##### Les conditions aux limites en remplissage

Le domaine d'étude est représenté sur la figure (4.1).

- *conditions d'entrée*

Sur la zone d'injection, qui peut être multiple dans le cas où on a plusieurs zones d'alimentation en métal liquide, on impose un profil de vitesse.

$$\vec{v} = \vec{v}_d(\vec{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_d$$

Dans le code de calcul *R3*, c'est un profil de vitesse constant de type "bouchon" qui a été implémenté [5].

- *conditions de surface libre*

Sur la surface libre  $\Gamma_T$ , on peut spécifier un vecteur contrainte pour prendre en compte la pression générée par la compression de gaz résiduels dans le moule, ou la tension de surface[5].

$$\vec{T} = \vec{T}_d(\vec{x}, t)$$

- *conditions en paroi*

La condition théorique d'adhérence parfaite sur les parois internes du moule, ou condition de contact collant, se traduit par une condition de Dirichlet homogène :  $\vec{u} = \vec{0}$ .

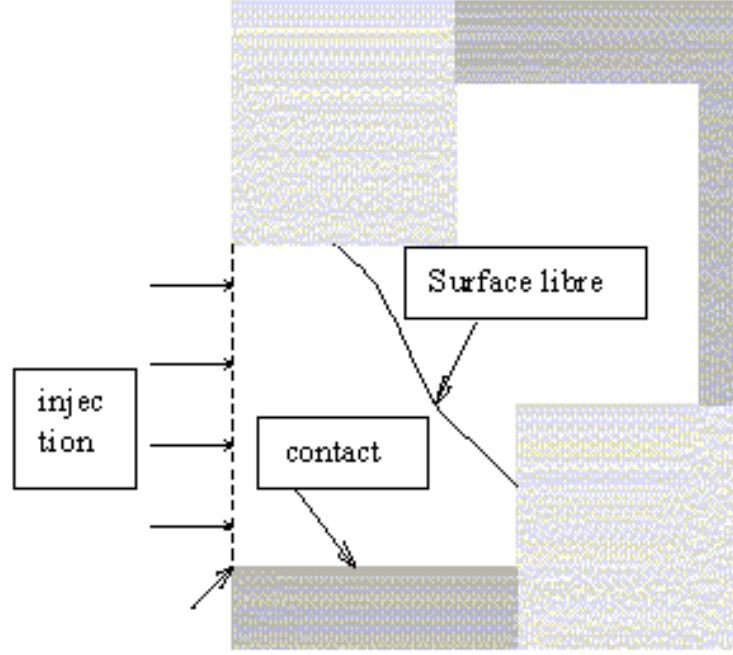


FIG. 4.1 – Représentation schématique des conditions aux limites en remplissage

Cependant, dans le code de calcul *R3*, on néglige une fine couche de fluide en frontière, en traduisant son action sur le reste de l'écoulement par une loi de frottement de type Norton[5].

– La loi de frottement est donnée par la relation :

$$T_t = -\alpha\eta\Delta v_t$$

où  $\alpha$  est le coefficient de frottement, homogène à l'inverse d'une longueur,  $\eta$  est la viscosité, et  $\Delta v_t$  est la vitesse de glissement tangentielle.

Notons que sur d'éventuels plans de symétrie, on impose les conditions mixtes classiques qui expriment un flux normal et une contrainte tangentielle nuls[5] :

$$v_n = 0 \quad T_t = 0$$

### 4.3 Discrétisation temporelle

Le schéma numérique utilisé est celui de Adams-Bashforth, introduit dans notre code de simulation *R3* par Bahloul[5]. C'est un schéma simple qui permet de prendre en compte les effets d'inertie. En se plaçant sur l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ , on suppose connues la configuration  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  et la vitesse à l'instant  $t - \Delta t$  ( $v^{t-\Delta t}$ ). L'accélération est alors donnée par le schéma implicite d'Euler décentré amont

$$\gamma_t = \frac{v^t - v^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (4.9)$$

Les équations d'équilibre mécanique et d'incompressibilité sont résolues sur la configuration  $\Omega_t$  de l'instant  $t$ . En fin d'incrément de temps, on réactualise la configuration selon le schéma suivant d'ordre deux :

$$x^{t+\Delta t} = x^t + \Delta t \cdot v^t + \frac{\Delta t^2}{2} \gamma^t \quad (4.10)$$

Ce qui donne, en utilisant la relation (4.9)

$$x^{t+\Delta t} = x^t + \Delta t \left\{ \frac{3}{2} v^t - \frac{1}{2} v^{t-\Delta t} \right\} \quad (4.11)$$

## 4.4 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

### 4.4.1 Formulation variationnelle

On note  $L^2(\Omega)$  l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  et  $H^1(\Omega)$  l'espace de Sobolev, inclu dans  $L^2(\Omega)$ , défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \nabla q \in (L^2(\Omega))^3 \right\}$$

On note :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^3 \mid \vec{v} = \vec{v}_d \text{ sur } \Gamma_d \} \\ \mathcal{V}^0 &= \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^3 \mid \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_d \} \\ \mathcal{Q} &= L^2(\Omega) \end{aligned}$$

On cherchera le champ de vitesse  $\vec{v}$  et la pression  $p$  dans l'espace fonctionnel  $\mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ .

### Formulation faible continue

Elle est obtenue en intégrant les équations du problème continu et en appliquant le théorème de la divergence au système obtenu. On obtient alors le système suivant :

Trouver  $(\vec{v}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  tel que  $\forall (\vec{v}^*, p^*) \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{Q}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}^* d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta \dot{\epsilon}(v) : \dot{\epsilon}(v^*) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v}^* d\Omega &= \int_{\Gamma_T} \vec{T}_d \cdot \vec{v}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \vec{v}^* d\Omega \\ \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \vec{v} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

### Formulation faible discrète

La méthode de Galerkin utilisée pour les éléments finis consiste à transformer le problème continu en un problème discret. On calcule alors la solution sous sa forme variationnelle (4.12) non plus dans les espaces continus de dimension infinie  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{Q}$ , mais dans des sous-espaces d'approximation, de dimension finie  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$ .

On construit pour cela, une triangulation  $\Omega_h$  approchant la forme du domaine  $\Omega$  :

$$\Omega_h = \bigcup_e \Omega_e$$

A chaque élément de la triangulation  $\Omega_e$  sont associées des fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_h &\subset \mathcal{V} \\ \mathcal{Q}_h &\subset \mathcal{Q}\end{aligned}$$

Le problème discret s'écrit alors :

Trouver  $(\vec{v}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$  tel que  $\forall (\vec{v}_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{Q}_h$  :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} \rho \frac{d\vec{v}_h}{dt} \cdot \vec{v}_h^* d\Omega + \int_{\Omega_h} 2\eta \dot{\epsilon}(\vec{v}_h) : \dot{\epsilon}(\vec{v}_h^*) d\Omega - \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h^* d\Omega &= \int_{\Gamma_T} \vec{T}_d \cdot \vec{v}_h^* d\Gamma + \int_{\Omega_h} \rho \vec{g} \cdot \vec{v}_h^* d\Omega \\ \int_{\Omega_h} p_h^* \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega &= 0\end{aligned} \quad (4.13)$$

#### 4.4.2 Formulation mixte avec le mini-élément

Il reste maintenant à déterminer  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$ , soit les fonctions d'interpolation respectivement associées aux inconnues en vitesse et en pression, de manière à ce que le problème (4.13) soit bien posé. Le choix de sous-espaces vérifiant la condition de compatibilité de Brezzi-Babuska assure l'existence et l'unicité de la solution. L'élément retenu dans notre solveur est le  $P1^+/P1$  décrit dans ce paragraphe.

##### Description du mini-élément

L'élément  $P1^+/P1$  ou mini-élément, fut introduit par Arnold, Brezzi et Fortin [4] pour le calcul des écoulements de Stokes dans le cas bidimensionnel.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_h &= V_h \oplus B_h \\ \text{où} \quad V_h &= \{\vec{v}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^3 / \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega), \vec{v}_h|_{\Omega_e} \in (P_1(\Omega_e))^3\} \\ B_h &= \{\vec{b}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^3 / \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega), \vec{b}_h|_{\Omega_{e_k}} \in (P_1(\Omega_e))^3, k = 1, \dots, 4, \\ &\quad \text{et } \vec{b}_h = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega_e\} \\ \mathcal{Q}_h &= \{p_h \in \mathcal{C}^0(\Omega) / \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega), p_h|_{\Omega_e} \in P_1(\Omega_e)\}\end{aligned}$$

avec  $(\Omega_{e_k})_{k=1,\dots,4}$ , décomposition du tétraèdre  $\Omega_e$  en quatre sous-tétraèdres de sommet commun le centre de gravité de l'élément.

$P_1(\Omega_e)$ , ensemble des fonctions d'interpolation polynomiales de degré inférieur ou égal à 1.

Le problème discret se réécrit alors de la façon suivante :

Trouver  $(\vec{v}_h, \vec{b}_h, p_h) \in V_h \times B_h \times \mathcal{Q}_h$  tel que  $\forall (\vec{v}_h^*, \vec{b}_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{Q}_h$  :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} \rho \frac{d(\vec{v}_h + \vec{b}_h)}{dt} \cdot (\vec{v}_h^* + \vec{b}_h^*) d\Omega &+ \int_{\Omega_h} 2\eta \dot{\epsilon}(\vec{v}_h + \vec{b}_h) : \dot{\epsilon}(\vec{v}_h^* + \vec{b}_h^*) d\Omega \\ &- \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot (\vec{v}_h^* + \vec{b}_h^*) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{v}_h^* + \vec{b}_h^*) d\Gamma + \int_{\Omega_h} \rho \vec{g} \cdot (\vec{v}_h^* + \vec{b}_h^*) d\Omega\end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\int_{\Omega_h} p_h^* \text{div}(\vec{v}_h + \vec{b}_h) d\Omega = 0$$



L'élimination des degrés de liberté liés à la bulle permet de réduire le nombre d'inconnues et de stabiliser le système à résoudre [32] [69]. En effet, si  $C$  est un tenseur constant, on a la propriété d'orthogonalité suivante pour la bulle :

$$\int_{\Omega^e} C : \nabla b = 0$$

On peut alors réécrire l'équation 4.14 sous la forme :

Trouver  $(\vec{v}_h, \vec{b}_h, p_h) \in V_h \times B_h \times \mathcal{Q}_h$  tel que  $\forall (\vec{u}_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{Q}_h$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \rho \frac{d\vec{v}_h}{dt} \cdot \vec{v}_h^* d\Omega + \int_{\Omega_h} 2\eta \dot{\varepsilon}(\vec{v}_h) : \dot{\varepsilon}(\vec{v}_h^*) d\Omega - \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h^* d\Omega &= \int_{\Gamma_T} \vec{T}_d \cdot \vec{v}_h^* d\Gamma + \int_{\Omega_h} \rho \vec{g} \cdot \vec{v}_h^* d\Omega \\ \int_{\Omega_h} \rho \frac{d\vec{b}_h}{dt} \cdot \vec{b}_h^* d\Omega + \int_{\Omega_h} 2\eta \dot{\varepsilon}(\vec{b}_h) : \dot{\varepsilon}(\vec{b}_h^*) d\Omega - \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot \vec{b}_h^* d\Omega &= \int_{\Omega_h} \rho \vec{g} \cdot \vec{b}_h^* d\Omega \quad (4.15) \\ - \int_{\Omega_h} p_h^* \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega - \int_{\Omega_h} p_h^* \nabla \cdot \vec{b}_h d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Le problème (4.15), après application du schéma d'intégration temporelle d'Euler implicite sur l'incrément de temps  $[t; t + \Delta t]$ , forme un ensemble d'équations non linéaires d'inconnues  $\vec{v}_h, \vec{b}_h$  et  $p_h$  :

$$\begin{cases} R_v(\vec{v}_h, \vec{b}_h, p_h) = R_{vv} + R_{vb} + R_{vp} + R_v = 0 \\ R_b(\vec{v}_h, \vec{b}_h, p_h) = R_{bv} + R_{bb} + R_{bp} + R_b = 0 \\ R_p(\vec{v}_h, \vec{b}_h, p_h) = R_{pv} + R_{pb} + R_{pp} + R_p = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

où

$$\begin{aligned} R_{vv} &= \int_{\Omega_h} \rho \frac{d\vec{v}_h}{dt} \cdot \vec{v}_h^* d\Omega + \int_{\Omega_h} 2\eta \dot{\varepsilon}(\vec{v}_h) : \dot{\varepsilon}(\vec{v}_h^*) d\Omega & R_{vb} &= 0 & R_{vp} &= - \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h^* d\Omega \\ R_{bv} &= 0 & R_{bb} &= \int_{\Omega_h} \rho \frac{d\vec{b}_h}{dt} \cdot \vec{b}_h^* d\Omega + \int_{\Omega_h} \eta \dot{\varepsilon}(\vec{b}_h) : \dot{\varepsilon}(\vec{b}_h^*) d\Omega & R_{bp} &= - \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot \vec{b}_h^* d\Omega \\ R_{pv} &= - \int_{\Omega_h} p_h^* \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega & R_{pb} &= - \int_{\Omega_h} p_h^* \nabla \cdot \vec{b}_h d\Omega & R_{pp} &= 0 \\ R_v &= - \int_{\Gamma_T} \vec{T}_d \cdot \vec{v}_h^* d\Gamma - \int_{\Omega_h} \rho \vec{g} \cdot \vec{v}_h^* d\Omega & R_b &= - \int_{\Omega_h} \rho \vec{g} \cdot \vec{b}_h^* d\Omega & R_p &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} = \frac{1}{dt} \{ \vec{v}_h^t - \vec{v}_h^{t-\Delta t} \} \quad (4.17)$$

Du fait de la non-linéarité de (4.16) qui provient uniquement du contact unilatéral, problème qui sera exposé dans la section suivante, on utilise une méthode itérative de type Newton-Raphson qui conduit à la résolution d'une suite de systèmes linéaires.

La matrice de raideur est assemblée à partir des matrices locales de la forme :

$$H_{xy} = \frac{\partial R_{xy}}{\partial \vec{y}}$$

où  $(xy) = \{(vv); (vb); (vp); (bv); (bb); (bp); (pv); (pb); (pp)\}$  et  $\vec{y} = \{\vec{v}_h, \vec{b}_h, p_h\}$ .

Cette matrice est symétrique.

Ainsi, à chaque itération  $n$  de la méthode de Newton-Raphson, le système linéaire à résoudre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} H_{vv} & 0 & H_{vp} \\ 0 & H_{bb} & H_{bp} \\ H_{vp}^T & H_{bp}^T & 0 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} \delta \vec{v} \\ \delta \vec{b} \\ \delta p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_v \\ R_b \\ R_p \end{bmatrix}^{(n)} \quad (4.18)$$

$\vec{\delta v}$ ,  $\vec{\delta b}$  et  $\delta p$  sont les corrections itératives des champs  $\vec{v}_n$ ,  $\vec{b}_n$  et  $p_n$  :

$$\begin{cases} \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{\delta v} \\ \vec{b}_{n+1} = \vec{b}_n + \vec{\delta b} \\ p_{n+1} = p_n + \delta p \end{cases} \quad (4.19)$$

Les degrés de liberté de type “bulle” étant spécifiques à chaque tétraèdre, ils sont éliminés lors de l’assemblage. En effet, sur chaque élément  $\Omega_e$ , on a en écrivant la nullité du résidu (4.15b) :

$$\{\delta b^e\} = -[H_{bb}^e]^{-1} \left( \{R_b^e\} + [H_{bp}^e]\{\delta p\} \right)$$

La substitution de ces degrés de liberté dans le troisième résidu élémentaire donne :

$$[H_{vp}]^T \{\delta v\} - [H_{bp}]^T [H_{bb}^e]^{-1} \left( \{R_b^e\} + [H_{bp}^e]\{\delta p\} \right) = -R_p$$

Après assemblage, on obtient ainsi une formulation mixte en vitesse-pression avec pour seules inconnues les valeurs nodales des trois composantes de la vitesse et de la pression en chaque sommet des tétraèdres.

$$\begin{bmatrix} H_{vv} & H_{vp} \\ H_{vp}^T & -H_{bp}^T H_{bb}^{-1} H_{bp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\delta v} \\ \delta p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_v \\ -R_p + H_{bp}^T H_{bb}^{-1} R_b \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

A chaque itération de la méthode de Newton-Raphson, la résolution de (4.20) permet d’accéder aux corrections nodales  $\vec{\delta v}$  et  $\delta p$  afin de déterminer  $\vec{v}_{n+1}$  et  $p_{n+1}$  avec (4.19).

Pour résoudre les systèmes linéaires non définis positifs obtenus, on a choisi un solveur itératif qui permet d’avoir un stockage des données et un temps de calcul raisonnables, et qui est facilement parallélisable. Les méthodes de gradient conjugué ne pouvant pas s’appliquer aux systèmes symétriques non définis positifs, une méthode de résidu minimal est utilisée. D’autre part, la vitesse de convergence des méthodes itératives dépend du conditionnement du système linéaire. C’est pourquoi on préconditionne le système linéaire afin d’obtenir un conditionnement de la matrice le plus proche possible de 1. Ainsi, une méthode de résidu minimal, préconditionné par des blocs nodaux diagonaux a été retenue ici. Pour plus de détails sur le solveur qui est celui de *Forge3*, le lecteur intéressé pourra lire la thèse de Stéphane Marie [87].

## Expression après discrétisation et changement de variable

Pour l’élément  $P1^+/P1$ , les résidus linéaire, bulle et pression (4.16) s’écrivent respectivement :

$$\begin{cases} R_{v_{\lambda k}} = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} (V_{\lambda n}^t - V_{\lambda n}^{t-\Delta t}) N_n N_k d\Omega + \int_{\Omega} \eta B_{ij\mu m}^L V_{\mu m}^t B_{ij\lambda k}^L d\Omega \\ \quad - \int_{\Omega} N_m P_m \frac{\partial N_k}{\partial x_{\lambda}} d\Omega - \int_{\Gamma} T_{\lambda} N_k d\Gamma = 0 \\ R_{b_l} = \int_{\Omega} \mu B_{ij\mu}^b B_{\mu} B_{ijl}^b d\Omega - \int_{\Omega} N_m P_m \frac{\partial N_b}{\partial x_l} d\Omega - \int_{\Omega} \rho g_l N_b d\Omega = 0 \\ R_{p_{\mu}} = \int_{\Omega} -N_{\mu} \left( \frac{\partial N_k}{\partial x_{\lambda}} V_{\lambda k} + \frac{\partial N_b}{\partial x_m} B_m \right) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Avec  $v_\lambda = \sum_k V_{\lambda_k} N_k$  et  $b = \sum_e B_e \bar{N}_e$ .

Le terme d'inertie est négligé dans l'équation de la bulle. Le lecteur intéressé trouvera une justification dans la thèse de Jaouen[69].

Les coefficients  $B_{ij\lambda k}^L$  et  $B_{ij\lambda}^b$  sont des tenseurs d'ordre 4 respectivement définis par :

$$B_{ij\lambda k}^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_k}{\partial x_j} \delta_{i\lambda} + \frac{\partial N_k}{\partial x_i} \delta_{j\lambda} \right) \text{ et } B_{ij\lambda}^b = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_b}{\partial x_j} \delta_{i\lambda} + \frac{\partial N_b}{\partial x_i} \delta_{j\lambda} \right)$$

Bahloul [5], dans sa thèse a montré qu'après un changement de variable, on peut exprimer ces trois résidus en Newton. On obtient alors le système suivant homogène à une force :

$$\begin{cases} R_{v_{\lambda k}} = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} (V_{\lambda n}^t - V_{\lambda n}^{t-\Delta t}) N_n N_k d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta B_{ij\mu m}^L V_{\mu m}^t B_{ij\lambda k}^L d\Omega \\ \quad - \int_{\Omega} N_m Q_m \frac{\eta}{\bar{l}} \frac{\partial N_k}{\partial x_\lambda} d\Omega - \int_{\Gamma} T_\lambda N_k d\Gamma = 0 \\ R_{b_i} = \int_{\Omega} 2\eta B_{ij\mu}^b B_{\mu} B_{ijl}^b d\Omega - \int_{\Omega} N_m Q_m \frac{\eta}{\bar{l}} \frac{\partial N_b}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \rho g_l N_b d\Omega = 0 \\ R_{p_\mu} = \int_{\Omega} -N_\mu \left( \frac{\partial N_k}{\partial x_\lambda} V_{\lambda k} + \partial N_b \partial x_m B_m \right) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

où

$$Q_m = \frac{\bar{l}}{\eta} p \quad [\text{m.s}^{-1}]$$

avec  $\bar{l}$  la longueur caractéristique des éléments du maillage.

## 4.5 La tension superficielle

Le phénomène de tension superficielle est important en fonderie. En effet, il est susceptible d'influencer fortement les écoulements en parois minces, pour lesquels les phénomènes de surface sont importants. L'implémentation de ces effets dans le code *R3* a été réalisé par Christiane Fourment et Nathalie Eyssette et Michel Bellet [13]. Cette implémentation comprend notamment l'interaction entre la tension de surface et le contact appelée adhésion à la paroi. Ils se sont limités à l'étude des conditions statiques et n'ont pas abordé l'aspect dynamique du remplissage.

La tension de surface est une contrainte normale à la surface du liquide et est inversement proportionnelle au rayon de courbure moyen :

$$\vec{T} = -\gamma \frac{1}{R} \vec{n} \quad (4.23)$$

où  $\vec{T}$  est le vecteur contrainte,  $\gamma$  le coefficient de tension de surface,  $R$  le rayon de courbure moyen,  $\vec{n}$  la normale.

Le calcul de ce rayon de courbure moyen sur la surface discrétisée est inspiré des travaux de Brackbill [15] qui a montré que la courbure peut s'exprimer au moyen de l'opérateur divergence de surface :

$$\frac{1}{R} = \nabla_s \cdot \vec{n}$$

dans lequel les dérivées partielles en espace sont prises dans le plan local tangent à la surface. A partir de cette relation, on peut exprimer les forces de tension de surface appliquées aux surfaces 3D discrétisées. Cette méthode se décompose en trois étapes :

- *Calcul de la divergence surfacique des normales nodales*

Soit un triangle linéaire (1, 2, 3), et soient  $n^1$ ,  $n^2$ ,  $n^3$  les normales moyennes en ces nœuds.

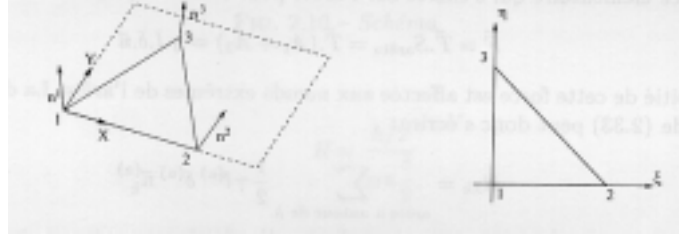


FIG. 4.2 – Système de coordonnées local

Dans le plan du triangle, on définit un système de coordonnées local  $(X, Y)$  où le vecteur unité  $\vec{e}_X$  est tangent à l'arête joignant les deux premiers nœuds du triangle et  $\vec{e}_Y$  est orthogonal à  $\vec{e}_X$  (cf figure 4.2).

Si  $(\xi, \eta)$  sont les coordonnées du point dans l'élément triangulaire de référence, en utilisant la convention de sommation des indices répétés, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot \vec{n} &= \frac{\partial n_X}{\partial X} + \frac{\partial n_Y}{\partial Y} \\ &= \frac{\partial (N_i n_X^i)}{\partial X} + \frac{\partial (N_i n_Y^i)}{\partial Y} \\ &= \frac{\partial N_i}{\partial X} n_X^i + \frac{\partial N_i}{\partial Y} n_Y^i \\ &= \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \right) n_X^i + \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right) n_Y^i \end{aligned}$$

où  $N_i$  est la fonction d'interpolation attachée au nœud  $i$ .

Dans le repère local, on peut écrire le vecteur coordonnées du point de coordonnées barycentriques  $(\xi, \eta)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{X}(\vec{\xi}) &= N_1 \vec{X}^1 + N_2 \vec{X}^2 + N_3 \vec{X}^3 \\ &= (1 - \xi - \eta) \vec{X}^1 + \xi \vec{X}^2 + \eta \vec{X}^3 \end{aligned}$$

L'expression de la courbure moyenne est alors, après calcul :

$$\nabla_S \cdot \vec{n} = \frac{1}{2S} \left[ Y^3 (n_X^2 - n_X^1) - X^3 (n_Y^2 - n_Y^1) + X^2 (n_Y^3 - n_Y^1) \right]$$

- *Expression des termes de tension de surface dans l'équation d'équilibre mécanique*

L'expression du vecteur contrainte extérieure résultant des tensions de surface est :

$$\vec{T}(\xi, \eta) = -\gamma (\nabla_S \cdot \vec{n}) \vec{n}(\xi, \eta)$$

Si  $\nabla_S \cdot \vec{n}$  est positif, la surface est localement convexe et le vecteur contrainte  $\vec{T}$  est dirigé vers l'intérieur du domaine fluide. La discrétisation du terme de

résidu de l'équation précédente donne alors dans ce cas :

$$R_{\lambda k} = - \int_{\Gamma_{libre}} \gamma (\nabla_S \cdot \vec{n}) N_\mu n_k^\mu \cdot N_\lambda d\Gamma \quad (4.24)$$

### 4.5.1 Adhésion à la paroi

L'adhésion à la paroi résume les effets résultant du contact d'un fluide avec une paroi solide. En effet, un système complexe de forces agit à l'intersection entre la surface libre et la paroi et au voisinage du contour de la surface libre. Sur le plan macroscopique, cela se traduit par l'existence d'un angle  $\theta_{eq}$ , appelé angle de contact statique (cf figure 4.3). Cet angle dépend des différentes énergies libres de surface qui caractérisent les différentes interfaces en présence :  $\gamma_{SL}$  (interface solide-liquide),  $\gamma_{LG}$  (interface liquide-gaz),  $\gamma_{SG}$  (interface solide-gaz). L'angle  $\theta_{eq}$  caractérise alors

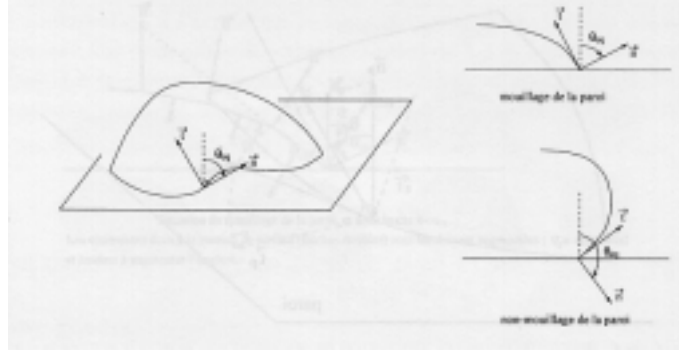


FIG. 4.3 – Angle de contact statique

le mouillage de la paroi par le fluide. Par définition, le fluide mouille la paroi si  $\theta_{eq} < 90^\circ$ . Cet angle dépend donc à la fois du solide, du liquide et du gaz. On le mesure précisément au repos et il dépend de la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi en conditions dynamiques.

Brackbill *et al* [15] proposent une approche bidimensionnelle très indirecte de la modélisation de l'adhésion en paroi. Il s'agit tout simplement de rendre compte de l'établissement d'un angle d'équilibre le long du contour de la surface libre, en appliquant des forces lorsque localement l'angle de contact courant  $\theta$  est différent de l'angle d'équilibre  $\theta_{eq}$ .

Ainsi, conformément à la figure (4.4), la normale moyenne modifiée est définie pour chaque nœud du contour de la manière suivante :

$$\vec{n} = \cos \theta_{eq} \vec{n}_p + \sin \theta_{eq} \vec{t}_p \quad (4.25)$$

où  $\vec{n}_p$  est la normale extérieure à la paroi au nœud considéré ; le vecteur  $\vec{t}_p$  est tangent à la paroi et obtenue par la projection sur le plan tangent à la paroi de la normale moyenne  $\vec{n}_{libre}$  à la surface libre.

Les figures (4.5) et (4.6) montrent en 2D l'effet de ce changement local du vecteur normal moyen, lorsque l'angle courant  $\theta$  diffère de l'angle d'équilibre  $\theta_{eq}$ .

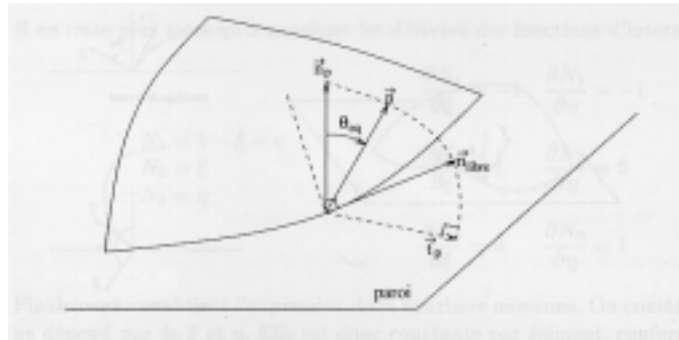


FIG. 4.4 – Normale moyenne modifiée

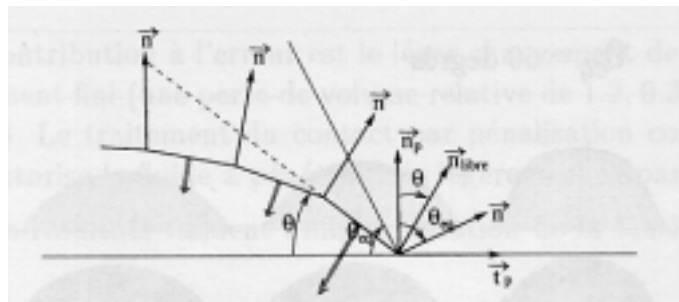


FIG. 4.5 – Situation de mouillage

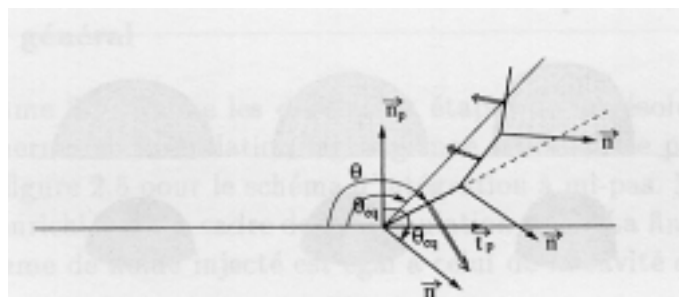


FIG. 4.6 – Situation de non mouillage

Le changement local de  $\nabla S \cdot \vec{n}$  modifie le système des tensions superficielles : des forces additionnelles sont générées qui tendent à faire évoluer la surface libre vers l'état d'équilibre.

La mise en œuvre numérique de cette méthode se fait de la façon suivante :

- en chaque nœud de la surface libre on calcule la normale moyenne  $\vec{n}$  ;
- pour chaque nœud du contour on détermine  $\vec{t}_p$  et la nouvelle expression de  $\vec{n}$  par (4.25) ;
- la contribution de la tension de surface à la formulation variationnelle est fournie par (4.24)

#### 4.5.2 Application : équilibre d'une goutte sur une paroi plane

On modélise l'évolution d'une goutte de fluide initialement de forme cubique, en contact avec une paroi plane. Le fluide a une viscosité de  $\mu = 50 Pa.s$  et une masse volumique de  $\rho = 1000 kg/m^3$ . Le coefficient de tension surfacique est de  $\gamma = 2 N.m^{-1}$ . Le calcul est effectué pour les deux angles de contact suivants :  $\theta_{eq} = 60$  et 120 degrés. Le cube initial a 5mm de coté. Le contact à la paroi est parfaitement glissant. Le maillage initial est composé de 1331 nœuds, 5000 tétraèdres, et de 1200 facettes en surface. Le pas de temps est de  $10^{-2}s$ . L'évolution du cube est donnée par les figures (4.7 et 4.8). La configuration initiale évolue vers une forme stable au bout de 0.5s environ. Les angles d'équilibre sont parfaitement respectés.

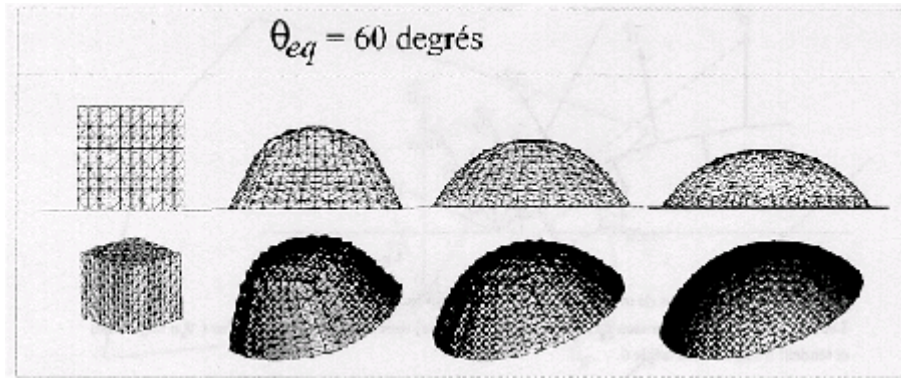


FIG. 4.7 – Illustration des effets de mouillage sur la formation d'une goutte pour un angle de 60 degrés [13]

### 4.6 Le remaillage automatique

Le mailleur 3D utilisé a été développé par Coupez [31] et est divisé en deux parties :

- Un mailleur surfacique  
Son but est d'améliorer le maillage initial issu de la CAO en modifiant la topo-

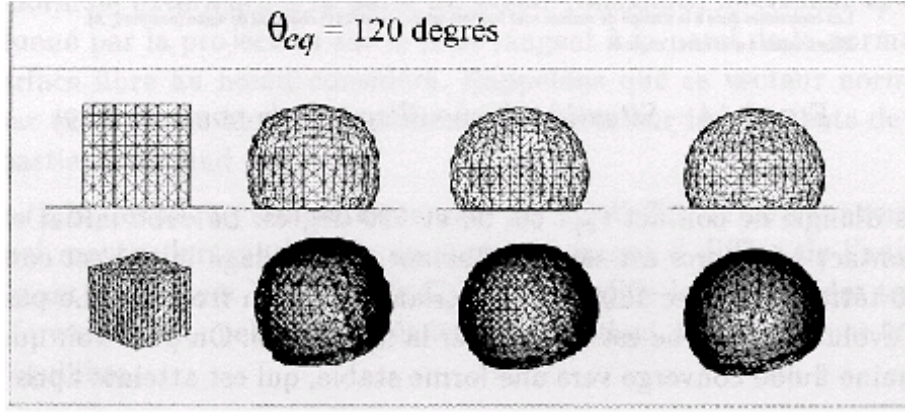


FIG. 4.8 – Illustration des effets de mouillage sur la formation d'une goutte pour un angle de 120 degrés [13]

logie de la triangulation, mais en préservant la géométrie de la pièce. Comme mesure de la précision géométrique, l'auteur propose la courbure locale définie par :

$$C(n) = 360^\circ - \sum_{T \in T_n} \alpha(n, T)$$

Où  $T_n$  est l'ensemble des triangles attenants au nœud  $n$  et  $\alpha(n, T)$  la mesure de l'angle au nœud  $n$  du triangle  $T$ .

Ainsi, toutes les opérations topologiques du mailleur surfacique (l'inversion des diagonales, la création ou la suppression de nœuds) doivent conserver la courbure locale, car, toute opération topologique conserve la géométrie si elle préserve la courbure locale.

– Un mailleur volumique

Il fournit le maillage volumique de la pièce à partir de la triangulation de la surface. Il peut se diviser en trois étapes :

- l'initialisation du maillage se fait en utilisant l'opérateur "étoile" qui relie un nœud de la surface à toutes les faces de la surface ne le contenant pas. On construit ainsi un maillage à partir de la seule information fournie par la frontière.
- Le recouvrement exact du domaine par des inversions de diagonales et en utilisant le principe du "volume minimal" qui conduit à l'égalité entre les volumes de la triangulation et celui de la pièce lorsque un maillage est atteint.
- L'amélioration topologique volumique selon un critère de qualité de tétraèdre défini par le rapport du volume au carré par la surface au cube.

Les critères de déclenchement du remaillage sont :

- La qualité des tétraèdres, définie comme étant le volume du tétraèdre au carré sur sa surface au cube ;
- La qualité des triangles de la surface, mesurée par le rapport de la racine carré de la surface du triangle par son périmètre au carré ;



- La pénétration du milieu des arêtes dans le moule ;
- La période de remaillage.

## 4.7 Application à la simulation de l'injection thixotrope

L'application que nous présentons ici est le remplissage de la pièce du projet ADFORM appelée "*Simulacro*", dont on peut observer une CAO à la figure (4.9). Il s'agit d'une pièce en A356 présentant des zones de possibles recirculation, des recollements de matière, et des parties très minces. Ces difficultés ont pour but de tester les capacités du code de calcul et du remaillage automatique. L'intérieur du moule est maillé et, pour la matière, nous avons un petit parallélépipède rectangle correspondant à l'état de la matière au début du remplissage. La figure (4.10) présente l'état de remplissage du moule auquel nous sommes parvenus, remplissage ne prenant en compte que la pièce proprement dite, sans le canal d'injection. On peut constater que ce moule a un trou rond qui constitue un obstacle à contourner. Ce type de difficulté n'est pas encore pris en compte par ce code de calcul. Aussi, avons nous décidé de simuler plutôt le remplissage du moule légèrement différent et symétrisé de la figure (4.11), et ceci pour permettre la mise en évidence d'autres éventuelles difficultés qui pourraient survenir au cours du remplissage de cette pièce. Les simulations ont montré que la procédure de remaillage automatique est assez robuste, et nous a permis d'aller assez loin dans la simulation du remplissage. Toutefois, nous avons buté sur des replis de matière (Figure 4.12) ayant entraîné la détérioration de la qualité du maillage et l'impossibilité pour le remailleur automatique d'en améliorer la qualité. Pour ces simulations, nous avons supposé que le matériau était newtonien et que, en paroi, on avait un frottement donné par la loi de Norton. Le procédé réel ayant une cinétique d'environ une seconde, nous avons choisi  $0.01s$  comme pas de temps, et  $0.5m/s$  comme vitesse d'injection.

## 4.8 Conclusion

Au terme de ce premier chapitre consacré à la simulation numérique, nous avons présenté le modèle de remplissage du code de simulation tridimensionnel R3 du laboratoire. Il est basé sur une formulation lagrangienne réactualisée. Pour la discrétisation spatiale, le mini-élément est utilisé avec une discrétisation particulière pour le champ bulle qui, ici, est considéré comme une fonction P1 discontinue [32]. Les applications en remplissage de moule de fonderie, notamment en ce qui concerne le moule symétrisé et le moule non-symétrisé du projet européen ADFORM dans le cadre duquel a été effectuée cette thèse, ont été effectuées. Elles butent sur le fait que le code et le remailleur automatique ne sont pas adaptés au traitement numérique des replis de matière et du contournement d'obstacle par la matière. C'est ce qui va justifier nos études des chapitres 6 et 7 dont le but est d'abord de

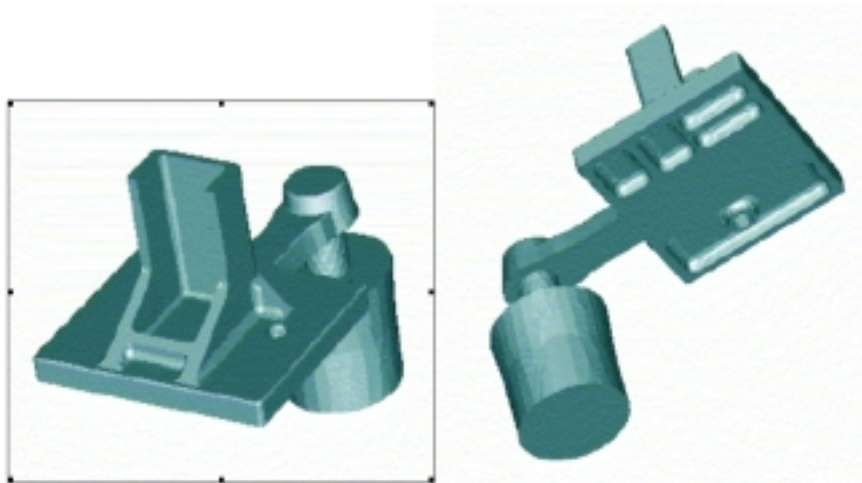


FIG. 4.9 – CAO de la pièce modèle du projet ADFORM (SIMULACRO) augmentée du canal d'injection

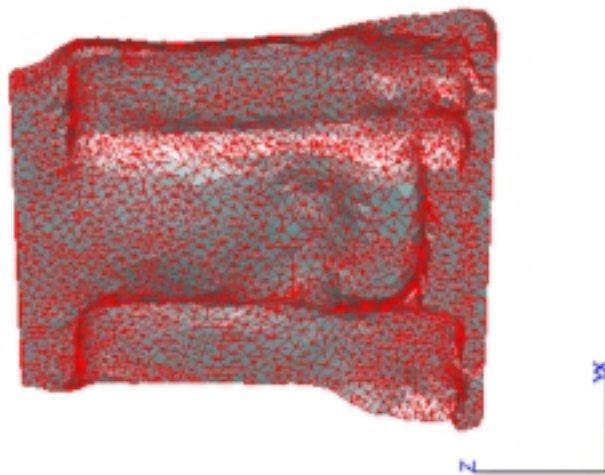


FIG. 4.10 – Etat du remplissage de la pièce modèle du projet ADFORM (le SIMULACRO)

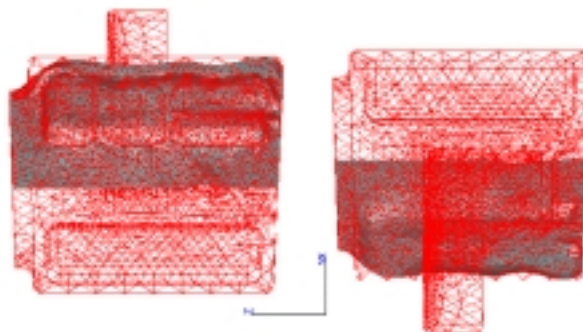


FIG. 4.11 – Etat de remplissage du SIMULACRO symétrisé



FIG. 4.12 – Coupe montrant la formation de replis de matière dans le SIMULACRO

réduire le recours au remailleur suivant une méthode ALE et ensuite de le supprimer suivant une méthode eulérienne. En attendant, le chapitre 5 détaille le traitement du contact et des replis de matière dont nous venons de voir l'importance.

# Chapitre 5

## LE CONTACT DANS R3

### 5.1 Généralités sur le contact

Le contact est, avec le frottement, un des phénomènes qui caractérise l'interaction de deux corps, ou de deux parties différentes d'un même corps. Numériquement, cela se traduit par l'imposition de la condition de non interpénétration. La grande difficulté est alors la non-linéarité du phénomène due aux fortes variations de la surface de contact observée pour des problèmes non stationnaires en grandes déformations, ainsi qu'au frottement qu'elles occasionnent. Aussi, la résolution d'un problème instationnaire de contact est-elle divisée en deux parties : une partie purement géométrique, qui est la détermination de la zone de contact, et une partie plus physique, qui est la détermination du phénomène se produisant à l'interface, phénomène à l'origine de la condition de non-interpénétration [55][134].

### 5.2 Conditions de contact

#### 5.2.1 Le cas quasi-stationnaire

##### La condition de contact unilatéral glissant

Pour l'historique sur les inéquations variationnelles qui décrivent les conditions de contact unilatéral avec frottement et le formalisme du problème de contact, j'invite le lecteur intéressé à consulter l'ouvrage de Duvaut et Lions [40] ou de Glowinski et al [56], ainsi que la résolution du problème dit de Signorini, largement expliquée dans plusieurs ouvrages[73][39].

En général, on a, pour un corps A, la condition de contact qui s'écrit de la façon suivante :

$$\vec{n}_A \cdot u_A \leq 0$$

où  $\vec{n}_A$  est la normale extérieure au corps A

et  $u_A$  est le déplacement de la frontière  $\Gamma_{Act}$ , correspondant à la partie en contact ou potentiellement en contact de la frontière du corps A.

A cette condition géométrique de non-pénétration, on rajoute une condition en pression sur la zone de contact du corps A. On impose alors à celle-ci d'être positive, ce qui traduit un état de compression du corps A :  $(-\sigma_n \geq 0)$ . Enfin, une dernière condition qui est le fait que sur la zone de contact entre les deux corps, on ait une contrainte normale non nulle en cas de contact. On obtient ainsi les équations sous la forme suivante dite de Kuhn et Tucker :

$$\begin{cases} u \cdot \vec{n} \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n \cdot (u \cdot \vec{n}) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Ainsi écrite, on a les équations de contact formulées en déplacement. En supposant le corps B en mouvement lui aussi, on peut réécrire les équations sous la forme suivante (vue du corps A) :

$$\begin{cases} (u_A - u_B) \cdot \vec{n}_A \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n \cdot (u_A - u_B) \cdot \vec{n}_A = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Toutefois, comme nous l'avons précédemment vu, les inconnues du problème sont plutôt la vitesse et la pression. On peut donc, en utilisant les vitesses à l'interface des deux corps, réécrire le système, pour un écoulement stationnaire où la condition géométrique de contact est vérifiée. On obtient ainsi la formulation en vitesse des équations du contact que nous avons utilisée :

$$\begin{cases} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n \cdot ((\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

C'est la condition de contact unilatéral en vitesse. Elle est utilisée en mise en forme et dans Forge3. Elle l'était dans R3 dans le cas où le corps B est un corps rigide, et que les nœuds de la surface de contact sont parfaitement en contact géométrique. Notre travail a donc consisté d'une part à l'étendre au cas de surfaces libres en autocontact, analogue au cas de deux corps déformables et d'autre part à rajouter les trois autres conditions de contact.

### La condition de contact unilatéral collant

Dans la pratique, on l'utilise un peu moins que la précédente, toutefois, elle trouve son application dans certains cas comme l'extrusion de polymères fondus. Dans ce cas, les corps A et B ont le même déplacement tangentiel au niveau de leur interface tant qu'ils restent en contact. Si la pression de contact à l'interface devient positive, les deux corps se séparent.

$$\begin{cases} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Avec si  $\sigma_n < 0$  alors

$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B) - ((\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A) \cdot \vec{n}_A = 0 \quad (5.5)$$

### La condition de contact bilatéral glissant

C'est le cas où un des deux corps glisse par rapport à l'autre sans jamais quitter le contact. On la rencontre par exemple dans des procédés comme l'injection semi-solide. Elle modélise une adhésion parfaite entre les deux corps. Elle se caractérise par l'égalité des vitesses normales, et donc aucune possibilité de relâchement du contact une fois qu'il est établi. Aussi, vu du corps A, on peut écrire les équations sous la forme :

$$\begin{cases} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A = 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

### La condition de contact bilatéral collant

C'est le cas où les deux corps restent collés après l'établissement du contact. On la rencontre dans le cas de métaux fondus. Elle se traduit numériquement par l'égalité des vitesses à l'interface. Aussi, on peut écrire les équations sous la forme :

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = 0 \quad (5.7)$$

## 5.2.2 Le contact incrémental

Les conditions de contact vues au paragraphe précédent ne sont valables que dans le cas de petites déformations ou dans des cas stationnaires. En grandes déformations, la surface de contact évolue rapidement, et les formulations en vitesse et en déplacement ne sont plus équivalentes. Aussi, a-t-on l'habitude d'écrire les équations de contact en prenant en compte la distance séparant les deux corps. Cette distance est algébrique, ce qui permet de savoir s'il s'agit d'une pénétration dans un autre corps ou de la distance séparant les deux corps. Dans ce cas, un noeud est "surveillé" dès qu'il arrive dans une zone proche du contact. On calcule alors son déplacement de telle sorte qu'il n'y ait pas de pénétration dans le corps en face (figure 5.1).

### La condition de contact bilatéral collant

Soit A un point de la zone potentielle de contact. On veut calculer  $\vec{v}^t$ , sa vitesse de telle sorte qu'il n'y ait pas pénétration du point A dans le corps en face distant de  $d_{AB}$ . Si B représente la position du noeud en regard sur la zone de contact en face, on a alors,  $\vec{AB} \cdot \vec{n}_{AB} = d_{AB}$ . En écrivant que la condition de contact  $d_{AB}^{t+\Delta t} = 0$  doit être vérifiée à l'instant  $t + \Delta t$ , puis en approchant cette équation non linéaire par un développement à l'ordre 1, on obtient la condition incrémentale de contact :

$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B) - \frac{d_{AB}}{\Delta t} \vec{n}_A = 0 \quad (5.8)$$

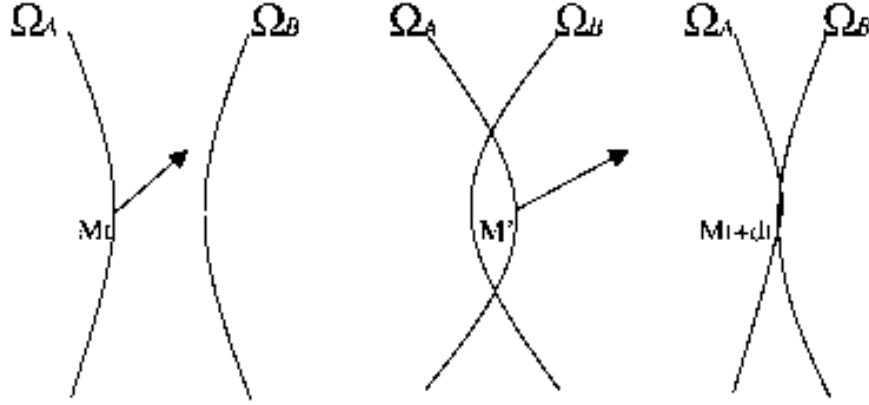


FIG. 5.1 – Détection et traitement du contact

### La condition de contact bilatéral glissant

De même, soient  $A$  un point de la zone potentielle de contact,  $d_{AB}$  la distance algébrique le séparant du corps en face,  $B$  la position du noeud en regard. On a alors, si le contact est intervenu au cours du pas de temps,  $\vec{AB} \cdot \vec{n}_{AB} \leq d_{AB}$ . Ce qui conduit à la formulation en vitesse suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_{AB} - \frac{d_{AB}}{\Delta t} = 0 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

### La condition de contact unilatéral glissant

En utilisant le même principe que précédemment pour les noeuds  $A$  et  $B$ , on obtient la formulation incrémentale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A - \frac{d_{AB}}{\Delta t} \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n \cdot \left( (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A - \frac{d_{AB}}{\Delta t} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

### La condition de contact unilatéral collant

Enfin, soit  $A$  un noeud susceptible d'entrer en contact avec un noeud  $B$  distant de  $d_{AB}$ , on peut écrire la formulation du contact incrémental de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A - \frac{d_{AB}}{\Delta t} \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n \cdot \left( (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A - \frac{d_{AB}}{\Delta t} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Avec si  $\sigma_n < 0$  alors

$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B) - ((\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}_A) \cdot \vec{n}_A = 0 \quad (5.12)$$

## 5.3 Méthodes utilisées pour appliquer la condition de contact à l'interface

### 5.3.1 La méthode maître/esclave standard

Cette technique consiste à appliquer la condition de contact uniquement sur le bord en contact de l'un des domaines ou, dans le cas d'un recollement de matière, sur une partie du bord[18][59][23][63]. On privilégie ainsi un des deux solides qu'on appellera corps esclave. La condition de non-pénétration écrite sur le corps esclave se traduit par des conditions sur le corps maître. Cette technique est utilisée au laboratoire lorsqu'il s'agit du contact entre un corps déformable et un outil, et entre corps déformables dans le cas de multi-domaines. On constate que dans ce cas le contact n'est pas symétrique. La conséquence peut être le mauvais traitement du contact dans certains cas, lorsque le maillage du solide maître est très fin. Les noeuds du corps maître peuvent pénétrer à l'intérieur du corps esclave. Aussi, le problème de ce type de méthode est-il le choix du solide maître, a priori le moins raffiné. Cependant, dans des situations de repli ou de recollement de matière comme celles qu'on peut rencontrer en remplissage, d'une part on ne peut pas facilement diviser la zone de contact en deux parties, et d'autre part il est encore plus difficile d'envisager la sélection du maître sur le critère de la taille locale de maille.

### 5.3.2 La méthode maître/exclave symétrique

Au vue des inconvénients de la méthode maître/esclave standard, et pour une première approche, nous avons choisi d'utiliser une méthode maître/esclave symétrique. Elle se caractérise par l'application de la condition de contact sur les surfaces en contact des deux corps. Ainsi, la condition de contact est mieux respectée, quelle que soit la finesse du maillage des dits corps. Aussi, dans notre cas de recollement de deux parties du même corps, on n'a pas à privilégier un bord par rapport à un autre. Si sur les deux parties de surface on n'a pas un maillage coïncident, alors on a un système surcontraint. C'est à dire qu'il y a plus d'équations que d'inconnues. Ceci a pour conséquence la rigidification de l'interface, et donc de fournir une solution inexacte au problème de contact à l'interface. Dans le cas des ressoudures, cette rigidification locale de l'écoulement est moins problématique que dans le cas de deux corps distincts. Si par contre on a des maillages coïncidents sur les deux parties de la surface du corps en autocontact, le problème est bien posé et la solution trouvée converge vers la solution du problème physique.



## 5.4 Méthodes numériques pour résoudre le problème d'optimisation avec contrainte créé par l'application de la condition de contact à l'interface

On distingue deux grandes classes de méthodes : les méthodes géométriques qui consistent à régulariser la zone de contact de manière à empêcher l'interpénétration des deux domaines et les méthodes algébriques qui consistent à intégrer la condition de contact dans les équations du problème. On présentera dans les lignes et paragraphes suivants un exemple de méthode géométrique et les principales méthodes algébriques utilisées pour la résolution de problèmes de contact.

### 5.4.1 Méthode de reprojection de la frontière

Cette méthode est généralement utilisée dans le cas du contact entre un corps déformable et un corps rigide. C'est une méthode géométrique qui consiste à projeter la partie de la frontière du corps déformable repérée à l'intérieur du corps rigide sur la frontière de ce dernier, de manière à avoir une intersection de volume nulle entre les deux corps. Comme la condition de contact n'est pas introduite à l'intérieur de la formulation mathématique du problème, on a des pertes de volumes dues à la régularisation du contact. Ceci impose des pas de temps assez petits pour en limiter l'importance. Cette approche fut utilisée au début de la simulation numérique des problèmes de forgeage.

### 5.4.2 La méthode des multiplicateurs de Lagrange

C'est une méthode de résolution d'un problème d'optimisation avec contraintes consistant en sa transformation en un problème d'optimisation sans contraintes, par écriture d'un Lagrangien et minimisation de ce dernier. Pour les lecteurs intéressés, elle est décrite avec plus de précision dans les ouvrages de Fletcher[45] et Cook[29]. En écrivant le Lagrangien du problème, on ajoute de nouvelles inconnues au système qui sont les multiplicateurs de Lagrange. On résout ainsi le problème de manière exacte et la condition de non interpénétration est bien imposée à l'interface. Numériquement cela conduit généralement à la résolution d'un système plus complexe, ayant une matrice hessienne non définie positive. En effet, les termes du second ordre en  $\lambda$  (multiplicateurs de Lagrange homogènes à une contrainte normale de contact) sont nuls, ce qui entraîne des zéros sur la diagonale de la matrice. On a donc en plus un problème de conditionnement matriciel à résoudre. La conséquence est un accroissement du temps CPU et l'impossibilité de résoudre avec les méthodes itératives habituelles. Un autre problème de la méthode de Lagrange est la non différentiabilité du gradient dans le cas du contact unilatéral. Le hessien n'est alors pas défini. Cela conduit à des méthodes itératives de type point fixe, qui ne convergent pas toujours bien. Aussi, certains auteurs ont modifié légèrement le système matriciel obtenu

par la méthode des multiplicateurs de Lagrange de manière à avoir une matrice hessienne mieux conditionnée. C'est ce qui a donné naissance à la méthode du Lagrangien perturbé.

### 5.4.3 La méthode du Lagrangien perturbé

C'est une méthode de régularisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui consiste à ajouter à la matrice hessienne des termes de telle sorte qu'on obtienne une matrice définie positive. Cette technique a été appliquée pour la résolution d'un problème de contact par Wriggers, Simo et Taylor en 1985[112]. Le système numérique est plus facile à résoudre car mieux conditionné, mais, cela se fait au détriment de la précision sur la solution du problème initial de contact. En effet, puisqu'on résout un problème légèrement différent, on a une solution approchée, c'est à dire des interpénétrations à l'interface. Il est alors nécessaire d'effectuer des itérations de la méthode en augmentant progressivement la valeur du paramètre de perturbation. Le point critique est alors le choix du terme perturbateur de telle sorte qu'on ait à la fois une solution acceptable pour le problème de contact et une matrice hessienne suffisamment bien conditionnée pour que la convergence se fasse relativement rapidement par rapport à la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

### 5.4.4 La méthode de pénalisation

C'est une méthode de résolution d'un problème d'optimisation avec contraintes qui consiste à le transformer en un problème d'optimisation sans contraintes par pénalisation[45][29]. En pratique, soit le problème suivant :

*Trouver  $u \in U \subset V$  solution de  $J(u) = \min J(v)$  pour  $v \in V$ .*

$U = \{v \in V / \psi(v) = 0, \text{ avec } \psi : V \longrightarrow R^+ \text{ convexe}\}$

est ainsi appelé ensemble des contraintes.

Ce problème peut être approché par le problème suivant :

*Trouver  $u_\epsilon \in V$  solution du problème*

$J_\epsilon(u_\epsilon) = \min J_\epsilon(v)$  pour

$v \in V$  avec  $J_\epsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2\epsilon}\psi(v)^2$  et  $\epsilon > 0$

La littérature sur cette méthode assure que le problème pénalisé admet une solution unique  $u_\epsilon$  et que  $\lim u_\epsilon = u$ , la solution du problème avec contraintes quand  $\epsilon \longrightarrow 0$  sous les hypothèses précédentes et, si  $J$  est continue, strictement convexe et coercive. Ainsi, on n'ajoute pas de nouvelles inconnues au problème et on a une matrice hessienne qui est bien définie positive. On résout donc un problème approché dont la solution est d'autant plus proche de celle du problème de départ que le coefficient de pénalisation  $\frac{1}{\epsilon}$  est grand. On a alors à l'interface des deux domaines une condition de contact qui n'est pas bien respectée et donc une interpénétration des deux domaines qui peut être contrôlée par le choix du coefficient de pénalisation. Cependant, sur le plan numérique, l'augmentation de  $\frac{1}{\epsilon}$  se traduit par l'augmentation de la non linéarité du problème et donc une convergence beaucoup plus lente, et aussi par la

détérioration du conditionnement du système à résoudre. Le point délicat de cette méthode est donc le choix d'un coefficient de pénalisation assurant conjointement une convergence rapide de l'algorithme de résolution et un assez bon respect de la condition de contact à l'interface entre les deux corps. Aussi, pour améliorer la précision de la méthode de pénalisation, certains auteurs ont pensé à la combiner aux multiplicateurs de Lagrange, ou encore à perturber cette dernière méthode par un coefficient issu de la pénalisation. On obtient ainsi la méthode dite du Lagrangien augmenté.

#### 5.4.5 La méthode du Lagrangien augmenté

Cette méthode consiste à combiner la méthode des multiplicateurs de Lagrange et celle de pénalisation[113][131][45][47]. La condition de non interpénétration des deux corps comprend ainsi deux parties provenant chacune d'une des méthodes précédemment citées : on écrit le lagrangien de la fonctionnelle à minimiser sous contraintes et on lui ajoute un terme provenant de la pénalisation des contraintes. Une description plus complète de la méthode peut être consultée par le lecteur intéressé dans les ouvrages de Fortin et al[47][48]. De manière générale, on a de nouvelles inconnues qui sont rajoutées au système dues aux termes provenant des multiplicateurs de Lagrange, et la matrice hessienne est définie positive. Selon plusieurs auteurs, on peut ainsi avoir des coefficients de pénalisation assez faibles et, s'ils sont bien choisis, la solution du problème ainsi posé est alors la solution exacte du problème de minimisation initial. Elle permet d'avoir un système relativement bien conditionné pour une résolution itérative. Une seule itération de la méthode fournit la solution pénalisée. Les itérations suivantes permettent alors de se rapprocher autant qu'on le souhaite de la solution avec multiplicateurs de Lagrange.

#### 5.4.6 Conclusion

Chacune des quatre méthodes algébriques présentées précédemment a ses avantages et ses inconvénients. Avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, de nouvelles inconnues sont généralement ajoutées au problème initial à résoudre, et la condition de non pénétration est satisfaite de manière exacte. Toutefois, on ajoute des zéros sur la diagonale de la matrice hessienne du système qui se retrouve ainsi non définie positive. On augmente ainsi les temps de calcul d'une part à cause de l'ajout de nouvelles inconnues au problème, et d'autre part à cause du mauvais conditionnement de la matrice hessienne du système. La méthode du Lagrangien perturbé permet, par l'ajout d'un terme perturbateur dans la matrice hessienne, de rendre celle-ci définie positive. Ensuite, on fait des itérations pour que cette perturbation ait de moins en moins d'influence. Dans le cas de la méthode de pénalisation, on ne rajoute pas de nouvelles inconnues au problème, mais on observe dans certains cas un changement de profil de la matrice hessienne du système et une dégradation du conditionnement initial de celle-ci. Le point critique ici est le choix d'un coefficient de pénalisation assurant d'une part une pénétration raisonnable et d'autre

part une convergence relativement rapide. Une alternative est alors la méthode du Lagrangien augmenté qui consiste à améliorer la méthode de pénalisation en permettant l'utilisation de coefficients de pénalisation relativement bas, et d'améliorer la méthode des multiplicateurs de Lagrange par l'élimination des zéros sur la diagonale de la matrice hessienne du système. Cependant, numériquement, cela se traduit par une augmentation du temps de calcul. Aussi, en mise en forme, on utilise généralement la méthode de pénalisation qui permet d'obtenir une solution acceptable en terme d'interpénétration à l'interface des deux corps en contact, et ceci avec des temps de calcul assez raisonnables.

## 5.5 Le contact matière/matière et matière/outil dans R3

On reprend les équations du chapitre 4 dans le cas un peu plus général du contact matière/outil et matière/matière.

### 5.5.1 Comportement d'un matériau viscoplastique

Le comportement viscoplastique se caractérise par la dépendance de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation. Il modélise le comportement d'un métal à chaud. L'une des lois les plus utilisées par exemple est la loi de Norton-Hoff exprimant la valeur du tenseur déviateur des contraintes en fonction du tenseur des vitesses de déformation et de la viscosité du matériau.

$$\underset{\text{Avec}}{s} = \sigma + pId = 2\eta(\dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon} = 2K \left( \sqrt{3}\dot{\varepsilon} \right)^{m-1} \dot{\varepsilon} \quad (5.13)$$

$K$	consistance du matériau
$\eta(\dot{\varepsilon})$	viscosité dynamique du matériau,
$\sigma$	tenseur des contraintes

A l'état liquide, les alliages métalliques sont supposés avoir un comportement de fluide newtonien incompressible, ce qui correspond au cas particulier  $m = 1$  de la loi de Norton-Hoff. Aussi, la relation qui relie le tenseur déviateur des contraintes  $s$ , et le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\varepsilon}$  devient tout simplement linéaire avec  $\eta = K$ .

### Le potentiel viscoplastique

En admettant que toute la puissance dissipée est irréversible, et en utilisant les relations de la thermodynamique, on démontre que la loi de Norton-Hoff dérive d'un

potentiel[49]. Il existe donc une fonction  $\phi$  appelée potentiel de Norton-Hoff telle que :

$$s = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}}$$

avec

$$\phi(\dot{\varepsilon}) = \frac{K}{m+1} \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right)^{m+1}$$

Pour  $m = 1$  on a

$$\phi(\dot{\varepsilon}) = \frac{3}{2} \eta (3\dot{\varepsilon})^2$$

Dans la suite, on considère que  $m = 1$ .

### 5.5.2 Conditions aux limites

On peut imposer différents types de conditions aux limites sur tout le bord ou sur une partie du bord du domaine[49].

A l'interface outil/matériau, on impose des conditions aux limites mixtes :

$$h_1(v) = (v - v^{outil}) \cdot n = 0 \quad \text{non pénétration cas contact bilatéral} \quad (5.14)$$

$$h_1(v) = (v - v^{outil}) \cdot n \leq 0 \quad \text{non pénétration cas contact unilatéral} \quad (5.15)$$

$$\tau = \sigma_n - (\sigma_n \cdot n) n = T^d \quad \text{la loi de frottement} \quad (5.16)$$

En général, on prend comme équation (5.16) la loi de frottement de Norton pour des matériaux viscoplastiques.

$v^{outil}$  vitesse de l'outil en contact

Sur la partie du bord où on a recollement de la matière, on impose comme condition aux limites :

$$h_2(v, v_{vv}) = (v - v_{vv}) - \frac{d_{AB}}{\Delta t} \vec{n} \quad \text{non interpénétration} \quad (5.17)$$

$$(5.18)$$

$v_{vv}$  vitesse du noeud en vis – à – vis

A la surface libre, on impose une contrainte normale nulle.

On impose sur les autres parties du bord du domaine un chargement surfacique.

Le problème continu 4.8 avec les conditions de contact est réécrit alors de la manière suivante :

*Trouver  $v(x, t)$  et  $p(x, t)$  tels que  $\forall x \in \Omega$ , on ait*

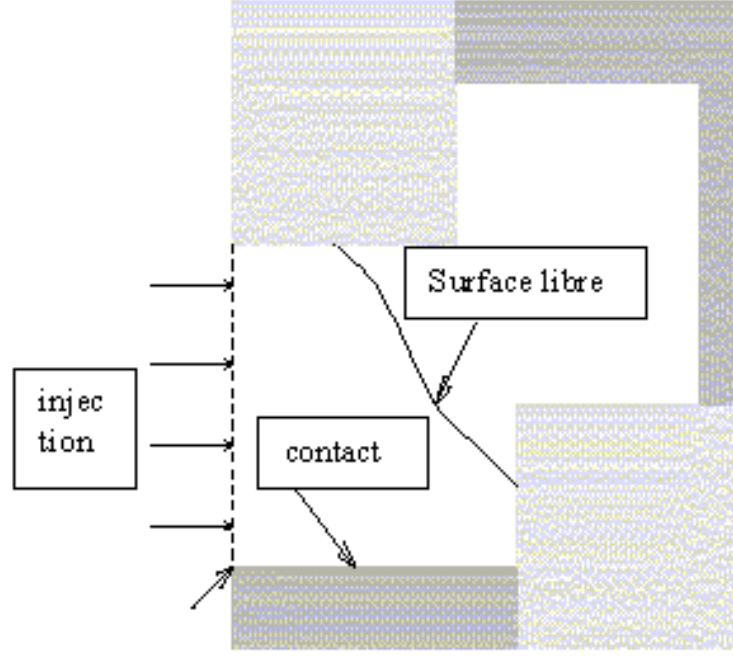


FIG. 5.2 – Conditions aux limites utilisées en remplissage

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho \vec{\gamma} - \nabla \cdot s + \nabla p & = \rho \vec{g} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot v & = 0 & \text{dans } \Omega \\ h_1(v) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_c \\ \tau & = T^d & \text{sur } \partial\Omega_c \\ h_2(v, v_{vv}) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{MM} \\ \sigma_n & = T^d & \text{sur } \partial\Omega_T \\ s & = 2\eta\dot{\epsilon} & \end{array} \right. \quad (5.19)$$

### 5.5.3 Formulation variationnelle du problème continu

#### Quelques espaces fonctionnels utilisés

On pose :

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^3, \text{ tel que } h_1(u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c, \ h_2(u, u_{vv}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{MM} \right\}$$

et

$$\mathcal{V}_l = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^3, \text{ tel que } u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{MM} \right\}$$

#### Ecriture variationnelle

On réécrit le problème variationnel sous la forme plus commode :

*Trouver*  $(v(x, t); p(x, t)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  tels que :

$$\begin{cases} \forall v^* \in \mathcal{V}_l(\Omega), & a(v, v^*) + b(v^*, p) = f(v^*) \\ \text{et } \forall p^* \in L^2(\Omega), & b(v, p^*) = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

avec,

$$a(v, v^*) = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot v^* dV + \int_{\Omega} s : \dot{\varepsilon}^* dV$$

$$b(v^*, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v^* dV$$

$$f(v^*) = \int_{\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_c} T^d \cdot v^* dS + \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot v^* dV$$

## Existence et unicité de la solution du problème variationnel

### Interprétation sous forme d'un problème d'optimisation avec contraintes

On considère l'espace  $\mathcal{Z}$  défini par :

$$\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{V}, \text{ tel que } b(u, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } J &: \mathcal{Z} \longrightarrow R \\ v &\longmapsto J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$J$  est une fonctionnelle quadratique. Son minimum est solution du problème :

$$\text{trouver } u \in \mathcal{Z} \text{ tel que } a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathcal{Z}$$

Le lagrangien de ce problème sous contrainte s'écrit alors :

$$L(v; p; \lambda; \gamma) = J(v) + b(v, p) + \int_{\partial\Omega_c} \lambda h_1(v) dS + \int_{\partial\Omega_{MM}} \gamma h_2(v, v_{vv}) dS$$

$$\text{avec } v \in H_1, \quad p \in \mathcal{Q}, \quad \lambda \in \mathcal{R}, \quad \gamma \in \mathcal{R}$$

## 5.5.4 Discrétisation

### Résolution du problème sans autocontact par la méthode de pénalisation

Le problème pénalisé discret, en considérant que le contact est bilatéral, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (v_h(x, t); p_h(x, t)) \in H^1(\Omega_h) \times \mathcal{Q}_h \\ &\text{tel que :} \end{aligned}$$

$$(v_h; p_h) = \underset{v_h \in H^1(\Omega_h)}{\operatorname{argmin}} J_h(v_h) + b(v_h, p_h) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \partial\Omega_c} \rho (h_1(k))^2 S_k$$

$S_k$  est une mesure de la surface rattachée au noeud  $k$ .

On a donc comme expression du gradient :

$G_{h\rho} = G_h + G_{hco}$ , Le dernier terme représentant la contribution du contact avec les outils.

$$G_{hco, k} = \rho_1 h_1(k) n_k S_k \quad (5.22)$$

De même on a comme hessien :

$$H_{h\rho} = H_h + H_{hco}$$

Avec  $H_{hco}$ , la matrice des contributions du contact au hessien. On alors :

$$H_{co,k} = \rho_1 S_k \begin{pmatrix} n_{k_1} n_{k_1} & n_{k_1} n_{k_2} & n_{k_1} n_{k_3} \\ n_{k_2} n_{k_1} & n_{k_2} n_{k_2} & n_{k_2} n_{k_3} \\ n_{k_3} n_{k_1} & n_{k_3} n_{k_2} & n_{k_3} n_{k_3} \end{pmatrix}$$

Où  $n_{k_i}$  représente la  $i$ ème composante du vecteur normal au noeud  $k$   $n_k$ .

## 5.6 Ajout du contact matière-matière dans R3 par une méthode de pénalisation

### 5.6.1 Contact bilatéral

**Cas collant**

La fonctionnelle discrète de pénalisation d'autocontact s'écrit :

$$\Phi_{MM\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\partial\Omega_{MM}} \rho_2 (h_2(k))^2 S_k$$

Avec ,

$$h_2(k) = v_k - v_{k'} - \frac{\delta_k}{\Delta t} n_k$$

où  $k'$  est le projeté du noeud  $k$  sur la surface en vis-à-vis dans le cas habituel des maillages non coïncidents :

$$v_{k'} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{k'_i} v_{k'_i}$$

et où  $k'_i$  sont les noeuds de la face sur laquelle se projette le noeud  $k$ .

– **Expression des termes de contribution du contact matière-matière au gradient et au hessien**

– **Cas maillages coïncidents**

Par soucis de simplicité, on ne considère que le cas du contact du noeud  $k$  avec le noeud  $k'$ . Le contact de  $k'$  avec  $k$  donne des formules identiques. On a

$$G_{MMk} = \rho_2 h_2(k) S_k$$

$$G_{MMk'} = -\rho_2 h_2(k) S_k \quad \text{Si maillages coïncidents et } k' \text{ non en autocontact.}$$

Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} I_3 & -I_3 \\ -I_3 & I_3 \end{pmatrix} \quad \text{Avec } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



On remarque l'apparition de termes extra-diagonaux de même valeurs que les termes diagonaux. La matrice hessienne n'est plus à diagonale bloc dominante.

– **Cas des maillages non-coïncidents :**

Par soucis de simplicité, on ne considère que la contribution du noeud  $k$  au gradient et au hessien. On a alors

$$G_{MMk} = \rho_2 h_2(k) S_k$$

$$G_{MMk'_i} = -\rho_2 h_2(k_i) S_k \alpha_{k'_i}$$

Si maillages non coïncidents et  $k'$  non en auto-contact. Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} I_3 & -\alpha_{k'_1} I_3 & -\alpha_{k'_2} I_3 & -\alpha_{k'_3} I_3 \\ -\alpha_{k'_1} I_3 & \alpha_{k'_1}^2 I_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_2} I_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_3} I_3 \\ -\alpha_{k'_2} I_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_1} I_3 & \alpha_{k'_2}^2 I_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_3} I_3 \\ -\alpha_{k'_3} I_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_1} I_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_2} I_3 & \alpha_{k'_3}^2 I_3 \end{pmatrix}$$

On remarque l'apparition de termes extra-diagonaux blocs non nuls et éventuellement supérieur aux termes diagonaux. Dans le cas général, la matrice est à diagonale bloc dominée.

**Cas glissant**

La fonctionnelle de pénalisation d'autocontact s'écrit :

$$\Phi_{MM\rho} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \partial\Omega_{MM}} \rho_2 (h_2(k))^2 S_k$$

Avec ,

$$h_2(k) = (v_k - v_{k'}) \cdot n_k - \frac{\delta_k}{\Delta t}$$

**Expression des termes de contribution du contact matière-matière au gradient et au hessien**

**Cas Maillages coïncidents :**

On a

$$G_{MMk_i} = \rho_2 h_2(k) S_k n_{k_i} - \rho_{k'} h_2(k') S_{k'} n_{k'_i}$$

$$G_{MMk'_i} = -\rho_2 h_2(k) S_k n_{k_i} \quad \text{Si}$$

maillages coïncidents et  $k'$  non en autocontact.

Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} M_3 & -M_3 \\ -M_3 & M_3 \end{pmatrix} \quad \text{Avec} \quad M_3 = \begin{pmatrix} n_{k_1} n_{k_1} & n_{k_1} n_{k_2} & n_{k_1} n_{k_3} \\ n_{k_2} n_{k_1} & n_{k_2} n_{k_2} & n_{k_2} n_{k_3} \\ n_{k_3} n_{k_1} & n_{k_3} n_{k_2} & n_{k_3} n_{k_3} \end{pmatrix}$$

### Cas Maillages non-coïncidents :

On a

$$G_{MMk_i} = \rho_2 h_2(k) S_k n_{k_i} - \sum_{k'' \in \text{noeuds en autoct se projetant sur une face contenant } k} \rho_{k''} h_2(k'') S_{k''} \alpha_{k''}$$

$$G_{MMk'_i} = - \sum_{k'' \in \text{noeuds en autoct se projetant sur une face contenant } k} \rho_2 h_2(k'') S_{k''} n_{k''} \alpha_{k''} \quad \text{Si}$$

maillages non coïncidents et  $k'$  non en autocontact.

Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} M_3 & -\alpha_{k'_1} M_3 & -\alpha_{k'_2} M_3 & -\alpha_{k'_3} M_3 \\ -\alpha_{k'_1} M_3 & \alpha_{k'_1}^2 M_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_2} M_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_3} M_3 \\ -\alpha_{k'_2} M_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_1} M_3 & \alpha_{k'_2}^2 M_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_3} M_3 \\ -\alpha_{k'_3} M_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_1} M_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_2} M_3 & \alpha_{k'_3}^2 M_3 \end{pmatrix}$$

## 5.6.2 Contact unilatéral

### Cas collant

La fonctionnelle de pénalisation d'autocontact s'écrit :

$$\Phi_{MM\rho} = \frac{1}{2} \sum_{k \text{ en autoct}} \rho_2 (h_2(k))^+ S_k$$

Avec,

$$(h_2(k))^+ = v_k - v_{k'} - \frac{d}{\Delta t} n_k \quad \text{si } > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

**Expression des termes de contribution du contact matière-matière au gradient et au hessien si  $h_2^+(k) > 0$**

### Cas Maillages coïncidents :

On a

$$G_{MMk} = \rho_2 h_2(k)^+ S_k - \rho_{k'} h_2(k')^+ S_{k'}$$

$$G_{MMk'} = -\rho_2 h_2(k)^+ S_k \quad \text{Si maillages coïncidents et } k' \text{ non en autocontact.}$$

Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} I_3 & -I_3 \\ -I_3 & I_3 \end{pmatrix} \quad \text{Avec } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Cas Maillages non-coïncidents :

On a

$$G_{MMk} = \rho_2 h_2(k)^+ S_k - \sum_{k'' \in \text{noeuds en autoct se projetant sur une face contenant } k} \rho_{k''} h_2(k'')^+ S_{k''} \alpha_{k''}$$

$$G_{MMk'} = - \sum_{k'' \in \text{noeuds en autoct se projetant sur une face contenant } k} \rho_2 h_2(k'')^+ S_{k''} \alpha_{k''} \quad \text{Si}$$

maillages non coïncidents et  $k'$  non en autocontact.

Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} I_3 & -\alpha_{k'_1} I_3 & -\alpha_{k'_2} I_3 & -\alpha_{k'_3} I_3 \\ -\alpha_{k'_1} I_3 & \alpha_{k'_1}^2 I_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_2} I_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_3} I_3 \\ -\alpha_{k'_2} I_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_1} I_3 & \alpha_{k'_2}^2 I_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_3} I_3 \\ -\alpha_{k'_3} I_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_1} I_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_2} I_3 & \alpha_{k'_3}^2 I_3 \end{pmatrix}$$

### Cas glissant

La fonctionnelle de pénalisation d'autocontact s'écrit :

$$\Phi_{MM\rho} = \frac{1}{2} \sum_{k \text{ en autoct}} \rho_2 (h_2(k))^+{}^2 S_k$$

Avec ,

$$h_2(k)^+ = (v_k - v_{k'}) \cdot n_k - \frac{\delta}{\Delta t} \text{ si } > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

**Expression des termes de contribution du contact matière-matière au gradient et au hessien si  $h_2(k)^+$  non nul**

#### Cas Maillages coïncidents :

On a

$$G_{MMk_i} = \rho_2 h_2(k)^+ S_k n_{k_i} - \rho_{k'} h_2(k')^+ S_{k'} n_{k'_i}$$

$$G_{MMk'_i} = -\rho_2 h_2(k)^+ S_k n_{k_i} \text{ Si maillages coïncidents et } k' \text{ non en autocontact.}$$

Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} M_3 & -M_3 \\ -M_3 & M_3 \end{pmatrix} \text{ Avec } M_3 = \begin{pmatrix} n_{k_1} n_{k_1} & n_{k_1} n_{k_2} & n_{k_1} n_{k_3} \\ n_{k_2} n_{k_1} & n_{k_2} n_{k_2} & n_{k_2} n_{k_3} \\ n_{k_3} n_{k_1} & n_{k_3} n_{k_2} & n_{k_3} n_{k_3} \end{pmatrix}$$

#### Cas Maillages non-coïncidents :

On a

$$G_{MMk_i} = \rho_2 h_2(k)^+ S_k n_{k_i} - \sum_{k'' \in \{\text{noeuds en autoct se projetant sur une face contenant } k\}} \rho_{k''} h_2(k'')^+ S_{k''} \alpha_{k''}$$

$$G_{MMk'_i} = - \sum_{k'' \in \{\text{noeuds en autoct se projetant sur une face contenant } k\}} \rho_2 h_2(k'')^+ S_{k''} n_{k''} \alpha_{k''}$$

Si maillages non coïncidents et  $k'$  non en autocontact.

Le hessien s'écrit alors :

$$H_{MM,k} = \rho_2 S_k \begin{pmatrix} M_3 & -\alpha_{k'_1} M_3 & -\alpha_{k'_2} M_3 & -\alpha_{k'_3} M_3 \\ -\alpha_{k'_1} M_3 & \alpha_{k'_1}^2 M_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_2} M_3 & \alpha_{k'_1} \alpha_{k'_3} M_3 \\ -\alpha_{k'_2} M_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_1} M_3 & \alpha_{k'_2}^2 M_3 & \alpha_{k'_2} \alpha_{k'_3} M_3 \\ -\alpha_{k'_3} M_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_1} M_3 & \alpha_{k'_3} \alpha_{k'_2} M_3 & \alpha_{k'_3}^2 M_3 \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas, le point important est de constater que le contact matière/matière ne permet pas de conserver le caractère bloc diagonal dominant de la contribution du contact. Qui plus est, on s'attend à ce que le bloc diagonal soit dominé dans la plupart des cas courants, entraînant ainsi une forte dégradation du conditionnement du système à résoudre, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

## 5.7 Préconditionnement du contact matière/matière

### 5.7.1 Mise en évidence des problèmes de conditionnement de la matrice

Comme nous l'avons vu, l'introduction des conditions de contact matière/matière se traduit en général par une perte de la propriété de dominance diagonale de la matrice du système. En effet, on introduit dans la matrice de rigidité des termes non diagonaux du même ordre de grandeur que les termes diagonaux, voire beaucoup plus grands. Ceci a pour conséquence de dégrader le conditionnement du système. Numériquement, cela se traduit par un accroissement notable du nombre d'itérations du solveur Orthomin, poussé à ses limites, et donc par une importante augmentation du temps CPU.

Nous avons donc travaillé sur les moyens d'améliorer le conditionnement de la matrice de rigidité. Pour mémoire, preconditionner le système matriciel  $Ax = b$  revient à choisir une matrice *facilement inversible*  $C$  et à résoudre le système équivalent  $C^{-1}Ax = C^{-1}b$  de telle sorte que  $C^{-1}A$  soit *assez proche* de la matrice identité, ou en tout cas que  $C^{-1}A$  ait un meilleur conditionnement que  $A$ . On pose alors  $x = C^{-1}y$ , et on résout le système  $C^{-1}AC^{-1}y = C^{-1}b$ . De manière générale, pour le problème de Stokes, on utilise des preconditionneurs blocs diagonaux qu'on peut répartir en deux grandes classes : les preconditionneurs symétriques et définis positifs pour lesquels la matrice  $C$  est définie positive et les preconditionneurs symétriques et non définis positifs qui sont ceux pour lesquels la matrice  $C$  n'est pas définie positive. Ce sont des preconditionneurs assez faciles à assembler. Le plus naturel est celui consistant à prendre la diagonale de la matrice pour les degrés de liberté correspondant à la vitesse et l'opposé de la diagonale pour les degrés de liberté correspondant à la pression. Le preconditionneur ainsi obtenu est symétrique et défini positif. Un autre preconditionneur peut être obtenu en prenant uniquement la diagonale de la matrice en vitesse. On obtient alors un preconditionneur non défini positif. Un preconditionneur plus efficace peut être obtenu en utilisant les blocs diagonaux. En théorie, les preconditionneurs les plus fiables sont ceux pour lesquels la matrice  $C$  est définie positive[87]. En effet, il existe alors des preuves de convergence. Toutefois, en pratique, on a observé au CEMEF que certains preconditionneurs non définis positifs étaient assez robustes et plus rapides que les preconditionneurs définis positifs. Malheureusement, ces preconditionneurs n'agissent que sur la diagonale de la matrice et ne permettent pas d'obtenir une matrice  $C^{-1}A$  à diagonale

dominante si  $A$  est à diagonale dominée.

### 5.7.2 Orthonormalisation de Gram-Schmit

C'est une technique permettant de diagonaliser une matrice symétrique par un changement de base orthogonal. Une première approche a donc consisté à transformer la matrice de rigidité afin qu'elle conserve sa propriété de dominance diagonale, par la diagonalisation de la sous-matrice constituée par les contributions du contact matière/matière.

Soient

$H$  le hessien total,

$H_{fg3}$  le hessien que l'on a sans les termes de contact matière/matière, et

$H_{mm}$  la contribution au hessien provenant du contact matière/matière.

$H_{mm}$  symétrique  $\Rightarrow \exists C_{mm}$  orthogonal tel que  $C_{mm}^t H_{mm} C_{mm} = D_{mm}$  avec  $C_{mm}^t = C_{mm}^{-1}$  et  $D_{mm}$  matrice diagonale.

#### Diagonalisation de $H_{mm}$

Soit à résoudre le système suivant :

$$HX = b \Leftrightarrow (H_{fg3} + H_{mm})X = b$$

Si  $C_{mm}$  est la matrice de changement de base, on a :

$$\begin{cases} C_{mm}^t (H_{fg3} + H_{mm})X &= C_{mm}^t b \\ X &= C_{mm} Y \end{cases}$$

On résout donc :

$$\begin{cases} C_{mm}^t (H_{fg3} + H_{mm})C_{mm} Y &= C_{mm}^t b \\ Y &= C_{mm}^t X \end{cases}$$

En posant

$$\tilde{H}_1 = C_{mm}^t (H_{fg3} + H_{mm})C_{mm}$$

et

$$\tilde{b}_1 = C_{mm}^t b$$

On peut réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{H}_1 Y &= \tilde{b}_1 \\ Y &= C_{mm}^t X \end{cases}$$

### Couplage avec un préconditionneur diagonal de Forge3

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \tilde{H}_1 Y &= \tilde{b}_1 \\ Y &= C^t_{mm} X \end{cases}$$

Avec  $\tilde{H}_1$  et  $\tilde{b}_1$  définis comme au paragraphe précédent.

Résoudre ce problème avec un préconditionneur revient à résoudre le système

$$\begin{cases} C^{-1} \tilde{H}_1 Y &= C^{-1} \tilde{b}_1 \\ Y &= C^{-1} Z \end{cases}$$

Où  $C^{-1}$  est l'un des préconditionneurs de diagonaux à disposition. Ceci revient donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} C^{-1} \tilde{H}_1 C^{-1} Z &= C^{-1} \tilde{b}_1 \\ Z &= CY \end{cases}$$

Système pouvant se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \tilde{H} Z &= \tilde{b} \\ Z &= CY \end{cases}$$

En posant

$$\tilde{H} = C^{-1} \tilde{H}_1 C$$

et

$$\tilde{b} = C^{-1} \tilde{b}_1$$

### Applications

#### – Cas où un seul noeud est en autocontact

Si on a un seul noeud en autocontact, ce qui correspond à une condition de contact maître esclave avec maillage coïncidents, les matrices hessienne et de changement de base s'écrivent de la façon suivante (contact collant) :

$$H_{mm} = \rho_2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_3 & \cdots & -I_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_3 & \cdots & I_3 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$C_{mm}^t = \rho_2 \begin{pmatrix} I & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}I_3 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2}}I_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2}}I_3 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}I_3 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & I & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & I \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}_1 = C_{mm}^t H_{fg3} C_{mm} + \rho_2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2I_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

On impose bien la condition de non pénétration au nœud en autocontact et on procède bien à la diagonalisation de la matrice additionnelle provenant du contact matière/matière.

– **Cas où deux nœuds en vis-à-vis sont en autocontact**

Cette fois on écrit deux fois la condition de contact, ce qui correspond à un algorithme symétrique de  $A$  avec  $B$  et de  $B$  avec  $A$ . La matrice hessienne additionnelle due au contact matière/matière s'écrit alors de la façon suivante :

$$H_{mm} = \rho_2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2I_3 & \cdots & -2I_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -2I_3 & \cdots & 2I_3 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

– **Cas où trois nœuds sont en autocontact**

$$H_{mm} = \rho_2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 3I_3 & \cdots & -2I_3 & 0 & \cdots & -I_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -2I_3 & \cdots & 2I_3 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & I_3 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

– **Cas général : forme de la nouvelle matrice hessienne globale**

$$\tilde{H}_{mm} = \rho_2 \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1i} & \cdots & h_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h_{i1} - h_{j1}) & \cdots & \frac{1}{2}(h_{ii} - 2h_{ij} + h_{jj}) & \cdots & \frac{1}{2}(h_{ii} - h_{jj}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h_{i1} + h_{j1}) & \cdots & \frac{1}{2}(h_{ii} - h_{jj}) & \cdots & \frac{1}{2}(h_{ii} + 2h_{ij} + h_{jj}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}(h_{ki} - h_{kj}) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}(h_{ki} + h_{kj}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

De manière générale, on peut dire que la diagonalisation de la sous-matrice issue des contributions du contact matière/matière se passe bien. On a bien comme terme prépondérant dans la ligne (respectivement) dans la colonne, le nouveau terme diagonal, celui issu du contact matière matière. L'inconvénient de cette approche est qu'elle est délicate à mettre en oeuvre dans le cas des maillages non coïncidents. Il faut alors écrire l'orthogonalisation de Gramm Schmidt pour la sous matrice concernant tous les noeuds affectés par l'auto-contact, alors que pour les maillages coïncidents on effectue cette orthogonalisation seulement au niveau des couples de noeuds en autocontact. L'approche devient alors lourde et coûteuse en temps CPU. Elle nécessite de résoudre un système linéaire pouvant être de grande taille. Nous avons alors été amenés à réfléchir sur une approche souple et plus générale. C'est ce qui nous a conduit à utiliser la factorisation incomplète de Crout.

### 5.7.3 Factorisation incomplète de Crout

Elle a été développée au CEMEF par Etienne Perchat au cours de sa thèse de doctorat [100], pour des matrices symétriques et non définies positives. Son principe est de construire une factorisation incomplète de la matrice, en calculant seulement les termes initialement non nuls. La factorisation ainsi calculée est stockée



de manière compacte dans un tableau analogue à celui contenant la matrice  $A$ . Si on appelle  $S$  l'ensemble des indices  $(i, j)$  des termes non nuls de la matrice  $A$ ,

$$S = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq N \text{ tels que } a_{ij} \neq 0\}$$

La factorisation incomplète de la matrice  $A$ ,  $M = LDL^t$  est alors construite en identifiant les composantes  $l_{ij}$  et  $d_{ij}$  tels que :

$$m_{ij} = a_{ij} \quad \forall (i, j) \in S$$

Avec

$$\begin{cases} m_{ij} &= \sum_{k=1}^N l_{ik} d_{kk} l_{kj} \\ l_{ij} &= 0 \end{cases} \quad \text{si } (i, j) \text{ n'appartient pas à } S$$

Cette factorisation dépend de la numérotation et de l'algorithme choisi. Il en existe plusieurs variantes. La version de base consiste à n'effectuer aucun remplissage supplémentaire par rapport à la matrice  $A$ . Une autre variante consiste à construire des factorisations incomplètes autorisant un remplissage supplémentaire. Une troisième variante consiste à effectuer une factorisation incomplète modifiée. Cette dernière méthode fournit un algorithme plus robuste que les précédentes en garantissant l'existence de la factorisation. De plus, elle permet de garder une partie de l'information contenue dans les termes non nuls de la factorisation que l'on a décidé de ne pas stocker. Les préconditionneurs étudiés au CEMEF sont notamment la factorisation incomplète de la matrice en vitesse et l'opposé de la diagonale en pression, une factorisation modifiée de la matrice en vitesse et l'opposée de la matrice en pression, une factorisation incomplète de la matrice en vitesse et la diagonale en pression, et enfin, une factorisation incomplète de la matrice en vitesse pression globale. C'est cette dernière version que nous avons utilisée comme préconditionneur. Ce choix nous permet de n'avoir qu'un seul préconditionneur dans les cas où on a des maillages coïncidents ou non coïncidents.

Le tableau suivant montre la dégradation des performances du solveur lorsque le nombre de noeuds en autocontact augmente. Il montre ensuite comment le préconditionneur par factorisation incomplète permet de limiter ce comportement. En effet, on constate que le rapport entre les nombres d'itérations avec les deux préconditionneurs passe de 13 (lorsqu'il n'y a aucun noeud en autocontact) à 30 (lorsqu'il y a 45 noeuds en autocontact). Rappelons au passage qu'une itération avec préconditionnement par factorisation incomplète de Crout coûte environ trois fois plus qu'une itération avec préconditionnement bloc diagonal.

Dans les deux cas, on agit bien sur les termes extra diagonaux issus ou non de la condition de contact matière/matière. Le tableau (5.3) montre le gain en terme de nombre d'itérations qu'apporte l'utilisation de la factorisation incomplète de Crout par rapport au préconditionneur diagonal dans tous les cas.

Nombre de noeuds en autocontact	Nombre d'itérations pour IVP (diag. vitesse et inverse des pressions)	Nombre d'itérations pour IC (Fact. incomplète de Crout)
0	269	20
1	493	33
30	9685	137
45	10324	361

FIG. 5.3 – Comparaison des performances des préconditionneurs IVP (diagonal en vitesse et inverse des pressions) et IC (factorisation incomplète de Crout)

## 5.8 Application

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple d'application du contact matière/matière en maillages non coïncidents. C'est l'écrasement entre tas plats d'un cube de dix centimètres de côté, entaillé à mi hauteur sur l'une de ses faces latérales. Son comportement est viscoplastique et la loi utilisée est celle de Norton-Hoff. La figure (5.4) présente le maillage initial du cube entaillé et le maillage après une dizaine de pas de temps, ce qui correspond à un écrasement de 25%. La figure (5.5) montre l'état déformé du cube entaillé en fin de simulation, soit après un écrasement d'environ 70%. Le contact est appliqué selon la méthode maître/esclave symétrique et imposé par une méthode de pénalisation.

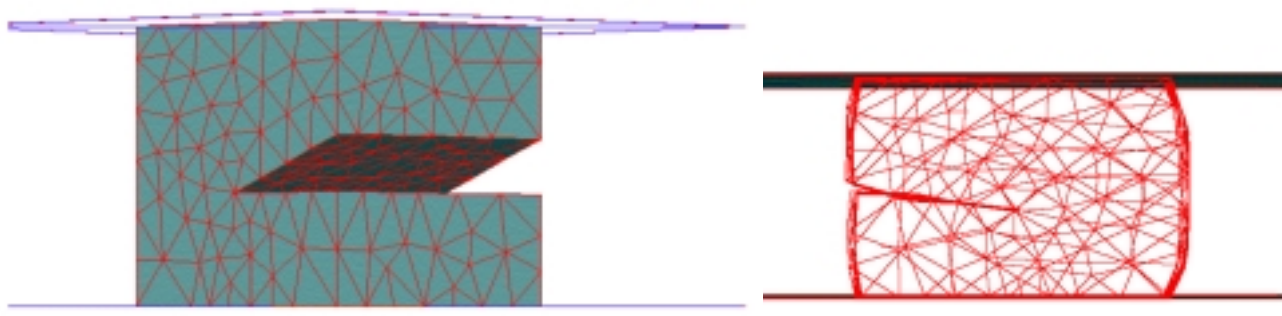


FIG. 5.4 – Vues du cube entaillé initial et du maillage de sa déformée

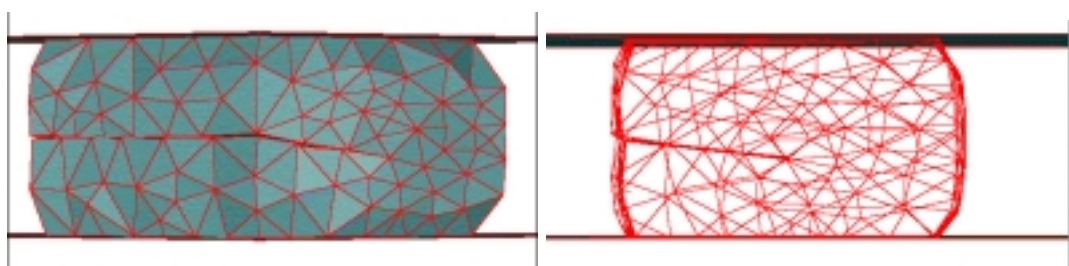


FIG. 5.5 – Vues du maillage du cube entaillé en fin de simulation

Ces figures nous montrent que la condition de contact est bien respectée et que

notre stratégie, la méthode maître esclave symétrique ne semble pas introduire des rigidités trop importantes. La pénétration des maillage reste limitée et est bien contrôlée au cours du temps.

## 5.9 Conclusion

Au terme de ce chapitre, on peut conclure qu'on a réussi à introduire une condition de contact matière/matière dans le code de calcul R3. Notre approche consiste à appliquer la condition de contact sur les bords des deux solides en contact, ou de part et d'autre de la frontière en autocontact du même solide. En effet, une fois que la détermination des noeuds en autocontact a été effectuée, on applique la condition de contact à tous ceux-ci. Pour être tout à fait général, nous avons développé une approche avec des maillage non coïncidents. Nous avons ensuite étudié le conditionnement de la matrice hessienne obtenue par ces deux approches. De cette étude, il ressort que la matrice hessienne est particulièrement mal conditionnée. L'ajout de la condition de contact se traduit par l'insertion dans la matrice de rigidité de composantes extra-diagonales de même ordre de grandeur que les termes diagonaux, et donc par la perte de la propriété de dominance diagonale de la matrice. Numériquement, cela se traduit par une augmentation notable du nombre d'itérations du solveur itératif. Comme les préconditionneurs à disposition étaient des préconditionneurs diagonaux ou blocs diagonaux, nous avons développé le changement de variable orthogonal de Gramm Schmidt pour condenser les termes ajoutés par la condition de contact sur la diagonale. Cette approche n'est valable que dans le cas où les maillages sont coïncidents. Ensuite, dans le cas général, nous avons introduit le préconditionneur par factorisation incomplète de Crout. Les résultats numériques montrent un gain notable, d'un facteur 10 par rapport aux préconditionneurs diagonaux, en terme de nombre d'itérations du solveur itératif, soit un gain de presque 3 en temps de calcul. Lorsque l'on a plusieurs noeuds en autocontact, le gain en nombre d'itération s'élève à presque 30 et en temps de calcul à presque 9. Ces résultats montrent également que les performances du préconditionneur par factorisation incomplète se dégradent moins vite que celles du préconditionneur diagonal lorsque le nombre de noeuds en autocontact augmente.

L'étape suivante de notre travail est donc tout naturellement son application aux cas de remplissage des moules de fonderie. L'algorithme de traitement du contact a donné de bons résultats et nous n'avons pas rencontré de situations de non convergence même dans les cas les plus complexes. Le blocage est venu du remaillage, notre approche conduisant à des maillages de trop grande complexité topologique et géométrique comme nous l'avons vu à la fin du paragraphe 4.

Aussi, avons nous décidé de travailler sur une formulation eulérienne lagrangienne arbitraire et sur le contrôle de la procédure de remaillage, et ceci, pour mieux contrôler les dégradation du maillage et essayer de les corriger a priori. C'est ce qui fait l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre 6

## FORMULATION ARBITRAIREMENT EULERIENNE- LAGRANGIENNE

### 6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu une formulation lagrangienne réactualisée. Nous avons vu que les fortes déformations subies par le maillage ne permettaient pas de résoudre des problèmes de remplissage de moules complexes. L'une des causes identifiées a été les replis de matières dont on a présenté au chapitre précédent une solution. Dans ce chapitre, nous présentons une approche de formulation eulérienne lagrangienne arbitraire (ALE). Cette formulation a été développée pour réduire les déformations du maillage.

### 6.2 Généralités sur la formulation arbitrairement eulérienne lagrangienne

En simulation numérique de la mise en forme des matériaux, il y a généralement deux approches qui sont utilisées pour décrire l'évolution du maillage : une approche lagrangienne généralement utilisée pour les solides et une formulation eulérienne plutôt utilisée dans le cas des écoulements des fluides. Dans le cas des méthodes lagrangiennes, la zone maillée correspond exactement à celle occupée par la matière. Le maillage évolue et se déplace en suivant les déformations de la matière. On suit donc exactement la matière dans son mouvement. La vitesse matérielle est égale à la vitesse du maillage et l'évolution de la surface libre est parfaitement représentée par le maillage à chaque pas de temps. Dans le cas d'une formulation eulérienne, le maillage est fixe. On regarde passer la matière. Tout le domaine fluide est maillé au début de la simulation et on utilise en général une fonction caractéristique pour indiquer pour chaque maille si elle contient ou non le fluide. La surface libre est

alors définie par les éléments ayant une valeur de fonction caractéristique comprise entre zéro et un. La vitesse d'évolution du maillage est donc nulle dans ce cas. La méthode ALE est intermédiaire entre ces deux méthodes. Elle se caractérise par une dissociation entre la vitesse de maillage et la vitesse matérielle. La vitesse du maillage est déterminée de manière plus ou moins arbitraire de façon à minimiser les déformations du maillage, et donc à ralentir la dégénérescence des éléments au cours de la simulation. Ainsi, le principe de la méthode eulérienne-lagrangienne mise en œuvre est de procéder dans un premier temps à une actualisation quasi-lagrangienne du maillage seulement en surface libre, de façon à ce que la frontière du maillage représente effectivement la surface libre du fluide. Le reste du maillage est ensuite régularisé de façon à répartir sur tous les éléments l'augmentation du volume de fluide pendant l'incrément de temps [11]. Cette opération se fait à nombre de nœuds, nombre d'élément et connectivité constants. Le schéma d'actualisation est alors :

$$x_{t+dt} = x_t + w_t \cdot dt$$

avec  $w_t$  la vitesse de maillage à l'instant  $t$ , comme on peut le voir sur la figure (6.1).

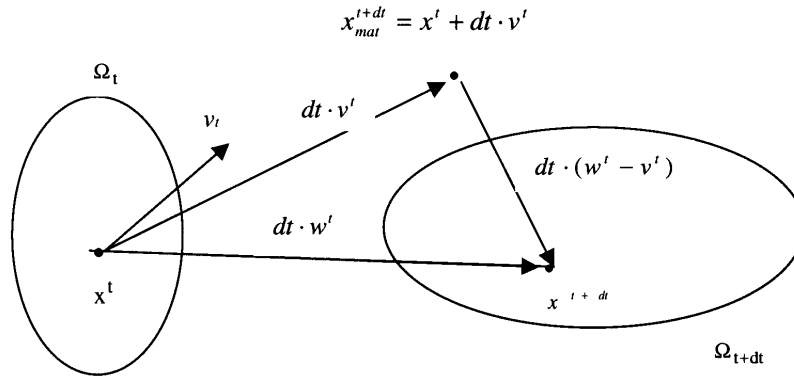


FIG. 6.1 – Description du schéma d'actualisation ALE

## 6.2.1 Formulation mathématique de l'ALE

### Les différents domaines

La théorie de l'ALE peut se définir à partir de trois domaines de travail : le domaine matériel, le domaine spatial et le domaine de référence [35]. Le domaine matériel est celui qui correspond à l'emplacement de tous les points matériels au temps  $t = 0$ . Le domaine spatial est celui correspondant aux points matériels suite aux déformations subies par le domaine matériel entre le temps 0 et le temps  $t$ . Enfin, le domaine de référence est supposé fixe. On peut relier ces différents domaines entre eux par des relations qui doivent être bijectives. Aussi, une application s'écrivant dans un de ces domaines peut être réécrite sur un autre domaine. Le lecteur peut

consulter la thèse de Traoré [122].

Dans la littérature sur l’ALE, peu d’auteurs utilisent la résolution des équations de conservation sur le domaine de référence. Toutefois, Schreurs [108] y a recours car cela lui permet de travailler sur un domaine fixe et Haber [58] s’en sert pour mieux traiter le contact. Les inconvénients de cette approche sont : l’introduction d’un terme jacobien supplémentaire qu’il faut linéariser ou dériver [108][58], et la non symétrie du premier tenseur de Piola-Kirchhoff [108] ou la complexité et le coût de calcul de second tenseur [58].

L’approche lagrangienne consiste à résoudre les équations de mécanique définies sur le domaine spatial avec le maillage lagrangien en prenant comme domaine de référence le domaine matériel. Dans la pratique, on fait du Lagrangien réactualisé, c’est à dire que sur un intervalle de temps, on suppose que le domaine de référence est le domaine matériel. On résout alors les équations de mécanique sur le maillage du domaine spatial et non sur le domaine matériel en raison de la non symétrie du premier tenseur de Piola-Kirchhoff ou de la complexité du calcul du second tenseur. En ALE, la plupart des auteurs utilisent une formulation quasi-eulérienne écrite sur le domaine spatial. On détermine le maillage ALE en régularisant le maillage lagrangien de telle sorte que le domaine de référence et son maillage ne sont jamais construits.

## 6.2.2 ALE et adaptativité de maillage

Le but de l’ALE est le plus souvent de diminuer le temps de calcul et de limiter la dégénérescence du maillage. Pour un schéma d’intégration explicite, le pas de temps pour que le schéma reste stable devient trop faible lorsque la qualité du maillage se dégrade. De manière générale, en formulation lagrangienne, les problèmes de distorsion géométrique et de consistance sont résolus en remaillant périodiquement ou lorsque la qualité des éléments passe sous un certain seuil.

L’adaptativité consiste à modifier les coordonnées des nœuds d’un maillage en conservant sa topologie. On parle alors de r-adaptativité. Ou encore, l’adaptativité peut consister à augmenter le degré d’interpolation des polynômes et on parle de p-adaptativité. Enfin l’adaptativité peut consister à changer la taille des mailles par raffinement ou déraffinement, et on parle de h-adaptativité ou de remaillage. Le but de l’adaptativité est de diminuer l’erreur de discrétisation à partir d’un estimateur d’erreur.

Contrairement à l’adaptativité, l’ALE prend en compte des critères géométriques, permettant éventuellement de diminuer l’erreur sur la solution. Cependant, l’ALE est généralement équivalent à la r-adaptativité. Au cours d’un calcul, la r-adaptativité est plus rapide qu’un remaillage tant pour la réactualisation des nœuds que pour le transport des variables, car on exploite la préservation de la connectivité. Parce qu’elle est plus rapide, la r-adaptativité est utilisée fréquemment, de telle sorte que la phase de transport doit être plus précise, et moins diffuse que les procédures simples d’interpolation parfois utilisées lors des remaillages. Ainsi, l’avenir en mise en forme quasi-lagrangienne semble être un calcul lagrangien avec une r-adaptativité

périodique et un remaillage lorsque la qualité du maillage dégénère.

## 6.3 Détermination de la vitesse de maillage

En général, il y a deux approches pour déterminer la vitesse de maillage :

- La méthode couplée, encore appelée méthode directe, qui permet de résoudre simultanément les équations d'équilibre et donc, de déterminer simultanément la vitesse matérielle et la vitesse de maillage sans passer par le calcul lagrangien. L'équation de type convection-diffusion est alors résolue soit par une méthode de type Galerkin ou SUPG [66][83], soit par une méthode de type caractéristiques/Galerkin [85].
- La méthode découplée ou *le splitting*, la plus utilisée, qui permet de dissocier le calcul de la vitesse matérielle et de la vitesse de maillage. A chaque pas de temps, on fait une itération lagrangienne. La vitesse de maillage  $w_t$  est alors calculée à partir de la vitesse matérielle  $v_t$ . Ensuite, la vitesse de maillage calculée sert pour l'étape de transport des variables d'état sur le nouveau maillage. Ainsi, l'adaptation d'un code lagrangien ne nécessite que le rajout d'un module de détermination de la vitesse de maillage et d'un module de transport des variables d'état. L'utilisation de cette technique est très ancienne [35][14][104]. Le principal avantage est qu'il n'y a pas de perturbations à craindre du terme de transport. Le pas de temps est indépendant de la vitesse convective, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on utilise la méthode directe. L'inconvénient majeur de cette approche est qu'une itération lagrangienne et un transport du second ordre ne donne après splitting qu'une méthode du premier ordre [104].

C'est cette dernière approche que nous avons utilisé. La vitesse matérielle est calculée par la résolution des équations d'équilibre en supposant que l'actualisation est lagrangienne réactualisée. La vitesse de maillage est ensuite calculée par un algorithme de barycentrage associé à des conditions aux limites particulières de manière à minimiser les déformations du maillage. Une phase de transport est alors nécessaire pour déterminer la vitesse matérielle aux nouveaux noeuds du maillage. Pour la vitesse de maillage, la fonctionnelle à minimiser peut s'exprimer comme suit :

$$J = \sum_{\text{noeuds}} (w(x) - \bar{w}(x))^2$$

Avec

$\bar{w}$  : vitesse moyenne du maillage et,

$w$  : vitesse du maillage au point  $x$ .

Des contraintes sont imposées sur la frontière du maillage avec pour but de l'obliger à suivre le domaine fluide. Le système ainsi construit est résolu par une méthode de pénalisation locale. Il y a deux différentes façons d'exprimer  $\bar{w}$ , selon que le noeud est sur la frontière ou non. Dans le domaine, on a  $\bar{w} = \frac{\sum_{\text{voisins topologiques}} w_i}{\gamma_{\text{topo}}(i)}$ ,

Où  $\gamma_{\text{topo}}(i)$  est le nombre de voisins topologiques du noeud  $i$ ,  $w_i$  est la vitesse de

maillage du noeud  $i$ . Sur la frontière nous avons  $\bar{w} = \frac{\sum_{\text{voisins surfaciques}} w_i}{\gamma_{sf}(i)}$ ,  
Avec  $\gamma_{sf}$  le nombre de voisins topologiques du noeud  $i$  sur la frontière.

### 6.3.1 Régularisation de maillage : le barycentrage

On exprime que chaque nœud interne du maillage doit se situer au barycentre des centres des éléments qui l'entourent. Soit  $n$  un tel nœud et  $nbe(n)$  le nombre d'éléments l'entourant (qu'on supposera numéroté de 1 à  $nbe(n)$ ). On souhaite donc avoir :

$$x_n = \frac{1}{nbe(n)} \sum_{e=1}^{nbe(n)} \bar{x}^e = \frac{1}{nbe(n)} \sum_{e=1}^{nbe(n)} \sum_{j \in e} \frac{1}{3} x_j \quad (6.1)$$

Si on interprète ceci en terme de nœuds sommets voisins du nœud  $n$ , ceci équivaut à avoir :

$$x_n = \frac{1}{3} x_n + \frac{1}{nbv(n)} \sum_{v=1}^{nbv(n)} \frac{2}{3} x_v$$

Où  $nbv(n)$  est le nombre de nœuds voisins du nœud  $n$ .

Cette relation est la base de l'algorithme utilisé pour résoudre ce problème. On procède de manière itérative et, l'itération à répéter jusqu'à stagnation est la suivante :

$$x_n^{\nu+1} = \frac{1}{3} x_n^{\nu} + \frac{1}{nbv(n)} \sum_{v=1}^{nbv(n)} \frac{2}{3} x_v^{\nu} \quad (6.2)$$

L'équation (6.2) est une itération de jacobi du système linéaire (6.1). A convergence de l'algorithme de barycentrage, nous obtenons le maillage de la nouvelle configuration défini par :

$$\forall n = 1, Nbnoe \quad x_n^{t+\Delta t} = x_n^{\infty} = x_n^t + w \Delta t$$

### 6.3.2 Régularisation en surface libre

Une régularisation similaire est effectuée en surface libre, en prenant garde à la conservation du volume du fluide. La vitesse de maillage devra donc être telle que :

$$\int_{\partial\Omega} w.ndS = \int_{\partial\Omega} v^{mat}.ndS \quad (6.3)$$

où  $v^{mat}$  est le champ de vitesse du fluide. Une solution mise en œuvre par Magnin [85] consiste à itérer sur les positions des nœuds en surface libre de la façon suivante :

$$x_n^{(\nu+1)}.\tilde{t}_n = \frac{1}{3} x_n^{(\nu)}.\tilde{t}_n + \frac{1}{nbv_{sl}(n)} \sum_{v=1}^{nbv_{sl}(n)} \frac{2}{3} x_n^{(\nu)}.\tilde{t}_n \quad (6.4)$$

Où  $nbv_{sl}$  est le nombre de voisins sur la surface libre et  $\tilde{t}_n$  est le vecteur *tangente discrète* en chaque nœud  $n$  de la surface libre. Ce vecteur tangente discrète est en fait une normale consistante, point qui est détaillé un peu plus loin dans le manuscrit.



### 6.3.3 Autre méthode de détermination de la vitesse de maillage : méthode de type Laplacien

C'est une méthode qui consiste à résoudre l'équation elliptique suivante en vitesse :

$$\begin{aligned}\Delta w &= 0 \text{ sur } \Omega_x(t) \\ w|_{\partial\Omega_x(t)} &= w_0\end{aligned}\tag{6.5}$$

ou l'équation en déplacements :

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \text{ sur } \Omega_x(t) \\ u|_{\partial\Omega_x(t)} &= u_0\end{aligned}\tag{6.6}$$

Cette méthode mise en place par Winslow [129][130] revient à minimiser le gradient de vitesse (équation 6.5) ou la densité de maillage (équation 6.6). La formulation en vitesse minimise la déformation lors du passage du maillage ALE de l'instant  $t$  à celui de l'instant  $t + \Delta t$ , mais n'améliore pas la qualité du maillage initial. En revanche, le calcul en déplacement permet une amélioration de la qualité des éléments. Sur le bord du domaine on peut imposer la vitesse de maillage par  $w.n = v_{mat}.n$  ou traiter cette condition comme une contrainte et résoudre le système obtenu par pénalisation ou par la méthode des multiplicateurs de Lagrange [116]. Le problème est mal posé si on n'ajoute pas une contrainte tangentielle à celle sur la composante normale de la vitesse.

Le principe du maximum fort nous assurant que le maximum d'une fonction harmonique est atteint sur le bord du domaine, on est assuré que la solution de l'équation (6.5) est un champ de vitesse délimité par la vitesse au bord, ou que les points correspondant aux déplacements solutions de l'équation (6.6) ne sortiront pas du domaine.

On a deux possibilités pour profiter du lissage opéré par l'opérateur Laplacien tout en conservant un contrôle du déplacement des nœuds internes. La première solution est de rajouter à la fonctionnelle de minimisation une fonction coût. Cela revient à ajouter un second membre à l'équation (6.5) ou à l'équation (6.6). Mais des difficultés sont à prévoir car le principe du maximum fort ne s'applique pas à l'équation de Poisson ainsi obtenue. Une autre façon de préserver la structure [38] est de remplacer la fonctionnelle de minimisation  $\int_{\Omega_x} |\nabla f|^2 dV$  par  $\int_{\Omega_x} W(x) |\nabla f|^2 dV$  où  $f$  désigne  $w$  ou  $u$  et  $W$  est une fonction de pondération scalaire. Ceci est équivalent à résoudre l'équation  $-\nabla \cdot (W \nabla f) = 0$

### 6.3.4 Conditions aux limites

Nous avons divisé la frontière du maillage en trois zones :

- les zones lagrangiennes dans lesquelles on impose  $w = v$ ,
- les zones eulériennes dans lesquelles on impose  $w = 0$ ,
- le reste de la frontière où on impose  $w.n = v.n$

## Les zones lagrangiennes

Nous avons choisi comme zones purement lagrangiennes réactualisées les zones contour de surfaces libres. C'est-à-dire les zones du maillage à la fois en contact avec la paroi et ayant au moins un noeud voisin sur la surface libre.

## Les zones eulériennes

Comme zones eulériennes, nous avons choisi entre autre la zone d'injection du fluide pour laquelle un débit constant est imposé. La détermination des autres zones eulériennes est faite selon des critères visant à éviter et à minimiser les déformations du maillage dans des zones où on observe des recirculations sur le champ de vitesse matérielle, c'est à dire dans les coins du moule. Dans ces zones, le barycentrage a pour conséquence le relâchement du contact. Un coin est défini comme étant un noeud ou un ensemble de noeuds du maillage ayant soit trois normales de pénalisation issues de l'analyse de contact, soit deux normales de pénalisation et un champ de vitesse contenu dans le plan de ces deux normales de pénalisation. Une extension de cette notion est faite pour figer le maillage dans des zones où la vitesse matérielle est faible. La conséquence est une stabilisation du maillage entre deux zones eulériennes successives. En effet, le remaillageur automatique n'intervient pas dans les zones à forte courbure ou dans les zones où le maillage est de bonne qualité. Les zones où on observe une recirculation du champ de vitesse sont généralement des zones où on observe une forte courbure sur le maillage surfacique. Il est donc important de régulariser le maillage dans ces zones en dehors des remaillages, cf figure(6.2).

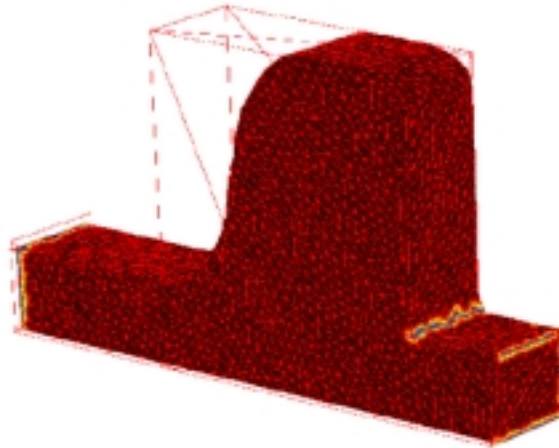


FIG. 6.2 – Cas de remplissage simple illustrant l'existence de noeuds en situation d'arête, pour lesquels un traitement eulérien est requis

## Le reste de la frontière

Sur le reste de la frontière, on impose comme condition aux limites  $v_{may}.n = v_{mat}.n$ , où  $n$  est une normale consistante, c'est-à-dire qu'elle permet de respecter la condition d'imcompressibilité du champ de vitesse, point que nous détaillerons un peu plus loin. Pour les zones en contact ou sur les plans de symétrie,  $n$  est la normale issue de l'analyse de contact ou des plans de symétrie.

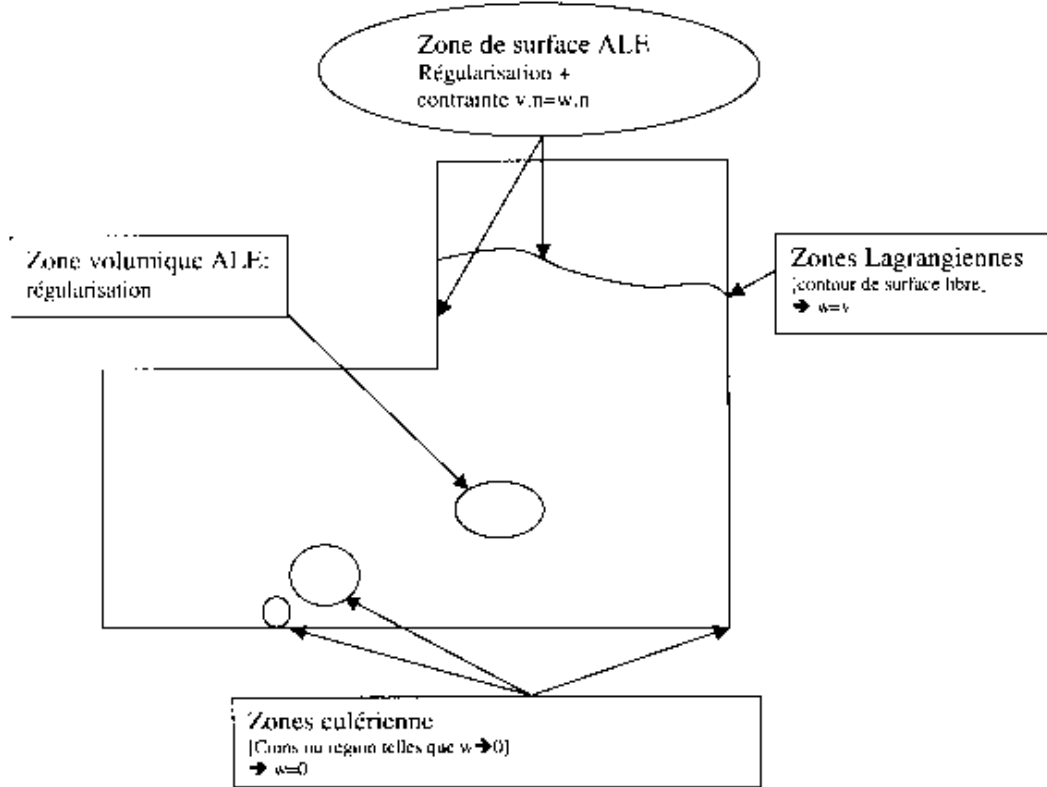


FIG. 6.3 – Schéma de la stratégie des conditions aux limites de l'ALE

## 6.4 Le transport des variables d'état

Pour le transport du champ de vitesse lagrangien calculé, nous avons utilisé un schéma aux différences finies pour décrire la discrétisation temporelle de l'expression de la dérivée de grille [22]. Si  $B$  est une variable, l'expression de la dérivée temporelle discrète par rapport à la grille est :

$$\frac{d_g B}{dt} = \frac{B^{t+dt}(x_{mat}^{t+dt}) - B^t(x^t)}{dt}$$

Sur le nouveau maillage, la variable  $B$  peut donc se réécrire de la façon suivante :

$$B^t = B^{t-dt} + \frac{d_g B}{dt} \cdot dt$$

A ce niveau,  $v_t$  et  $w_t$  sont connus, et donc on peut utiliser un schéma temporel implicite pour déterminer la dérivée de grille. Elle peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{d_g B}{dt} = \frac{B^{t+dt}(x^{t+dt}) - B^t(x^t)}{dt} - \nabla B^t \cdot (v^t - w^t)$$

Dans cette dernière équation, les termes d'advection sont calculés dans l'élément "upwind". Ce qui signifie que, pour chaque noeud du maillage, on recherche l'élément d'où vient la particule dans la direction amont. Le schéma de la figure (6.4) montre alors les différentes étapes de l'actualisation arbitrairement eulérienne lagrangienne.

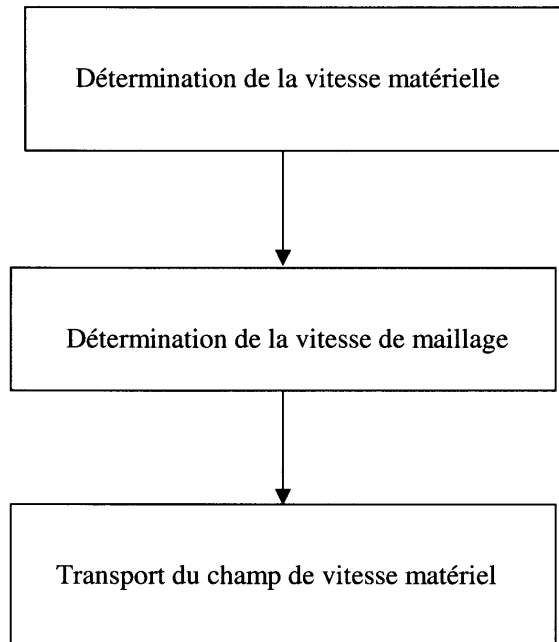


FIG. 6.4 – Séquence des différentes procédures de l'actualisation ALE

## 6.5 Les normales constantes

Après l'introduction de la formulation ALE précédemment décrite dans le code de calcul R3, nous avons commencé à lancer des applications sur des cas industriels, notamment sur le cas du Simulacro. Nous avons alors constaté, comme le montre la figure de gauche de la figure (6.5), que la condition d'incompressibilité

du matériau injecté n'était pas bien respecté. Ce qui veut dire que le volume du maillage était largement inférieur à celui du matériau injecté. Nous avons alors pensé que le problème pouvait provenir soit de l'incompressibilité incrémentale, soit d'un calcul inconsistant des normales du maillage. La seconde hypothèse nous a amené à implémenter les normales consistantes le long de la surface libre pour l'imposition des conditions aux limites du calcul de la vitesse de maillage. L'objectif ici est de trouver, à chaque point interpolé de la vitesse sur la frontière du domaine, une normale consistante discrète dans le sens où il permet de respecter exactement la condition d'incompressibilité du champ de vitesse.

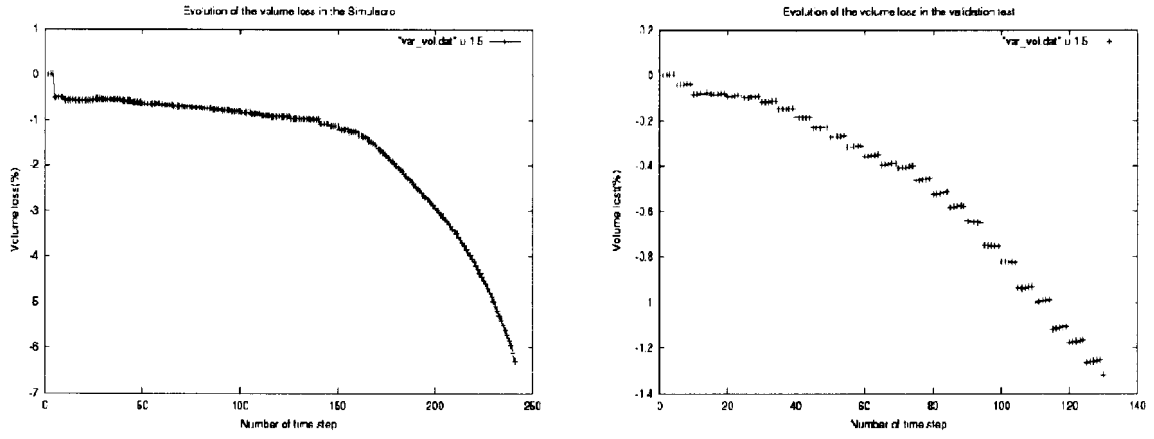


FIG. 6.5 – Pertes de volume dans le Simulacro sans normales consistantes et dans la géométrie de test après implémentation des normales consistantes

Cette normale consistante, doit être de telle sorte qu'un champ de vitesse tangent (orthogonal aux noeuds à cette normale) produise un flux de matière nul quand il est intégré sur la surface. L'expression de ce vecteur normal est obtenue par une simple intégration de la condition d'incompressibilité sur la frontière du domaine fluide [13]. Pour illustrer ce qui a été dit plus haut, soit  $\Omega = \bigcup \Omega_e$  la discrétisation élément finis du domaine de calcul, l'équation d'incompressibilité s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot v dV \quad (6.7)$$

L'injection de l'interpolation spatiale du champ de vitesse  $v$  dans (6.7) nous donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N_m}{\partial x_i} V_i^m dV = V_i^m \int_{\Omega} \frac{\partial N_m}{\partial x_i} = 0 \quad (6.8)$$

où  $N_m$  représente la fonction d'interpolation attachée au noeud  $m$ , et  $V_i^m$  est la  $i$ ème composante du vecteur vitesse au noeud  $m$ . En utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$V_i^m = \int_{\partial\Omega} N_m n_i dS = 0 \quad (6.9)$$

L'intégrale en (6.9) est calculée alors uniquement sur les noeuds de  $\Omega$  se trouvant sur la frontière  $\partial\Omega$ . La relation (6.9) peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_{\text{noeuds frontière } m} V^m \cdot A^m = 0 \quad (6.10)$$

En utilisant le raisonnement de Engelman et al. [42], les normales consistantes sont telles que tout vecteur vitesse nodal ne contribue pas au flux extérieur (6.7). C'est pourquoi nous avons pour tout noeud frontière  $m$ ,

$$V_{tg}^m \cdot A^m = 0 \quad (6.11)$$

où  $V_{tg}^m$  est le vecteur vitesse tangent au noeud  $m$ . Ce qui signifie que pour tout noeud frontière  $m$ , la normale consistante est un vecteur qui doit être colinéaire à  $A^m$ . Son expression est alors :

$$\tilde{n}^m = \frac{1}{||A^m||} A^m \quad (6.12)$$

Avec

$$A_i^m = \int_{\partial\Omega} N_m n_i dS \quad (6.13)$$

Dans le cas particulier d'une discrétisation linéaire, la relation (6.13) se réduit à

$$A_i^m = \sum_{e \in \tau(m)} \frac{1}{3} n_i^e S^e \quad (6.14)$$

où  $\tau(m)$  représente l'ensemble des facettes triangulaires du support du noeud  $m$ . Finalement, le vecteur normale consistante est une moyenne des normales aux faces entourant le noeud, pondéré par les aires de ces faces :

$$\tilde{n}^m = \frac{A^n}{||A^n||} \quad (6.15)$$

Avec  $A^n = \sum_{e \in \tau(m)} n_m^e S^e$  Pour tester l'introduction dans notre code de calcul des normales consistantes discrètes, et pour voir le respect de la condition d'incompressibilité sur la frontière du maillage, nous avons décidé de travailler d'abord sur un exemple de géométrie simple et représentatif du canal d'injection du Simulacro. Les résultats obtenus ont été très satisfaisants, comme le montre la figure (6.5), en terme de respect de la condition d'incompressibilité. Les pertes de volume observées proviennent uniquement du remaillage automatique, et ceci à cause de la dégradation du maillage au cours de la simulation.

## 6.6 Le maillage par boîtes et le raffinement du front de matière

Il s'agit de la définition d'une zone du maillage à l'intérieur de laquelle une taille de maille est imposée. Cette zone est délimitée par l'intersection entre la boîte de forme parallélépipédique et le maillage. Aussi, le mailleur procèdera à des opérations

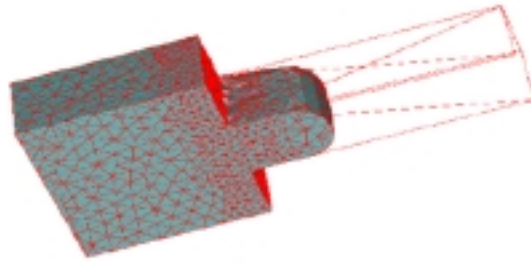


FIG. 6.6 – Maillage avec boîtes de la géométrie modèle de l’ALE

d’ajout de nœuds ou de suppression de nœuds jusqu’à ce que la taille des mailles de cette zone soit celle imposée. On peut voir (figure 6.6) un aperçu des boîtes de maillage. Ainsi l’utilisation de ces boîtes de maillage nous permet d’avoir un maillage raffiné dans certaines zones où l’écoulement présente des singularités et, un maillage moins raffiné dans d’autres zones. Toutefois, l’inconvénient de cette approche est que les boîtes sont fixes et définies au début de la simulation. Ce qui est un handicap si on veut avoir un maillage fin sur le front de matière, comme c’est souhaitable dans le cas d’une formulation eulérienne lagrangienne arbitraire comme la notre. Aussi nous avons étendu cette notion de boîtes, présente dans le mailleur de Forge3, en créant des boîtes mobiles. Le but est de suivre le front de matière tout au long de la simulation. Ainsi, les boîtes se déplacent en suivant la surface libre du maillage. Une profondeur est définie pour la boîte entre la surface libre et l’intérieur du maillage. On peut voir un aperçu de ce type de boîte sur la figure (6.7).

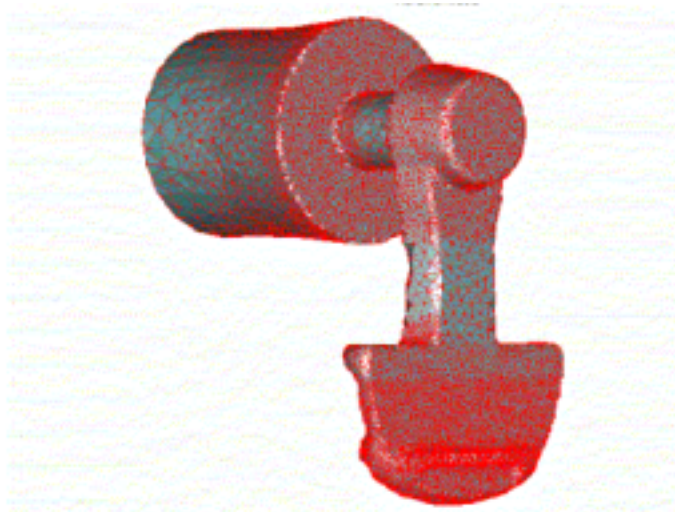


FIG. 6.7 – Visualisation des boîtes de maillage sur le SIMULACRO

## 6.7 Conclusion

Nous avons présenté la formulation eulérienne lagrangienne arbitraire utilisée et développée pour le code de calcul *R3*. Elle est basée sur le découplage des calculs de la vitesse de maillage et de la vitesse matérielle. Pour la détermination de la vitesse de maillage, un barycentrage assorti de conditions aux limites particulières a été mis en place. Pour le transport, nous avons utilisé une méthode basée sur la dérivée temporelle discrète par rapport à la grille. Les termes de convection sont alors calculés dans l'élément *upwind*. Pour que les conditions aux limites soient bien respectées, notamment la condition en surface libre, nous avons développé les boîtes mobiles de maillage. Toutefois, tous ces efforts ne nous ont pas permis de simuler jusqu'au bout le remplissage des moules industriels comme le Simulacro, et ceci à cause du remaillage automatique. En effet, malgré la régularisation ALE, nous avons observé une dégradation du maillage, surtout en surface, dans les zones de forte courbure. Aussi, nous avons décidé de passer à une formulation eulérienne et d'utiliser le code de calcul Rem3D développé au laboratoire pour des matériaux thermoplastiques et de l'adapter au remplissage des moules de fonderie. C'est ce qui fait l'objet du prochain chapitre.



# Chapitre 7

## FORMULATION EULERIENNE POUR LE REMPLISSAGE

### 7.1 Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons présenté successivement une formulation lagrangienne réactualisée et une formulation arbitrairement eulérienne lagrangienne utilisées pour le code R3. Nous avons vu que malgré les travaux réalisés tant sur la formulation que dans la procédure de remaillage, nous ne sommes par parvenus à simuler le remplissage des moules industriels jusqu’au bout. Nous avons alors décidé de passer au code de calcul Rem3D, initialement développé pour l’injection de thermoplastiques, et de l’adapter au remplissage des moules de fonderie. Le code Rem3D utilise une formulation eulérienne, comme nous allons le voir dans les lignes qui suivent.

### 7.2 Suivi de surface libre en formulation eulérienne

En formulation eulérienne, le maillage de toute la cavité est défini a priori. On travaille, la plupart du temps, à maillage fixe. Néanmoins, certains auteurs procèdent parfois à un raffinement local du maillage pour l’adapter aux détails de l’écoulement. L’avantage de travailler sur un maillage global est la facilité de la prise en compte des grandes déformations et des recollements de matière. En contre partie se pose le problème de la détermination des surfaces libres. Les solutions à ce problème peuvent être divisées en deux classes : les méthodes de suivi de surface ou de marqueurs et les méthode de suivi de volume.

#### 7.2.1 Méthodes de suivi de surface ou de marqueurs

L’interface, dans les méthodes de suivi de surface, est représentée comme une surface interpolée par un ensemble de points. Un des moyens les plus simples pour représenter la surface libre est de définir sa distance par rapport à une ligne de référence. L’évolution au cours du temps de la fonction est gouvernée par une équation traduisant le fait que la surface doit se déplacer avec le fluide. Une généralisation

de cette approche en deux dimensions est de considérer des segments ou des points reliés par des segments. Les coordonnées de chaque point sont stockées et, il est nécessaire de limiter la distance maximale entre deux points voisins. L'évolution de la suite des segments est donnée par le mouvement de chaque nœud selon la vitesse du fluide. Malheureusement, la détection des intersections ou des replis de matière n'est pas triviale avec cette méthode qui, jusqu'à présent, n'a été appliquée qu'à des géométries bidimensionnelles [62][30][75].

Dans la méthode des marqueurs, plus connue sous le nom de méthode Mark and Cell ou de méthode MAC, des points particuliers (sans masse) ou marqueurs déterminent les zones remplies du moule. Les marqueurs sont répartis dans le domaine fluide et se déplacent avec la vitesse locale du fluide. Le front de matière est défini comme étant la limite des zones avec et sans marqueurs. L'inconvénient de cette méthode est le coût du stockage des coordonnées des marqueurs dont le nombre croît au cours du remplissage. Cette technique a néanmoins été utilisée par de nombreux auteurs [120][132][107].

### 7.2.2 Méthodes de suivi de volume

C'est une technique assez simple nécessitant moins de ressources que la technique des marqueurs. Une fonction scalaire est définie sur tout le domaine de telle façon que sa valeur en certains points du domaine indique la présence ou l'absence de fluide. Cette fonction s'appelle fraction de volume fluide ou fraction de pseudo concentration ou taux de présence. Par exemple, on peut attribuer la valeur 1 en tout point occupé par le fluide et la valeur 0 dans le cas contraire. Ainsi, la valeur moyenne de cette fonction dans l'élément représente la fraction de volume de l'élément occupée par le fluide. Les éléments ayant une valeur de cette fonction comprise entre 0 et 1 contiennent la surface libre. Les méthodes ainsi définies s'appellent méthode VOF (volume of fluid). L'évolution temporelle de la fonction taux de présence est déterminée par une équation de transport établissant que la fonction se déplace avec le fluide. Introduite par Hirt et al [65], cette technique a depuis lors été utilisée par plusieurs auteurs [106][20][128][118][119][61], et c'est également une approche semblable que Coupez et Pichelin ont utilisé pour le code Rem3D [102].

## 7.3 Présentation du code de calcul Rem3D

Les hypothèses suivantes sont faites :

- Le matériau est supposé incompressible et sa masse volumique constante dans le temps et dans l'espace. L'équation de la masse s'écrit alors :

$$\nabla \cdot v = 0$$

- les forces extérieures sont négligées devant les forces intérieures. L'équation d'équilibre de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

### 7.3.1 Résolution de l'équation de transport de la fonction caractéristique par la méthode de Galerkin discontinue

La méthode VOF étant utilisée pour décrire l'évolution de la surface libre, il est nécessaire de résoudre une équation de transport. Le problème de transport est alors :

Trouver  $F_{\Omega_f}(x, t)$  tel que  $\forall (x, t) \in \Omega \times [t_0, t_f]$  on ait :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{\Omega_f}}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla F_{\Omega_f}(x, t) = 0 \\ F_{\Omega_f}(x, 0) = F^0 \quad \forall x \in \Omega \\ F_{\Omega_f}(x, t) = 1 \text{ en amont de la zone d'injection} \end{cases} \quad (7.1)$$

Où  $\Omega_f$  représente le volume occupé par le fluide,  $F$  la fonction caractéristique valant 1 sur  $\Omega_f$  et 0 sur  $\Omega_v = \Omega - \Omega_f$ , et  $v$  le champ de vitesse supposé connu.

On a ainsi à résoudre une équation hyperbolique dont Donea et al résument les méthodes de résolution [37]. Coupez et Pichelin ont choisi la méthode de Galerkin discontinue car son principe de saut provenant du gradient conduit à une résolution élément par élément peu coûteuse en temps de résolution. Cette méthode est couplée à un développement de Taylor d'ordre élevé. La méthode ainsi obtenue est le schéma de Taylor-Galerkin et a de bonnes propriétés de stabilité. Cette méthode a été utilisée également par Donea [36].

#### Formulation variationnelle

La fonction  $F$  étant discontinue, la formulation variationnelle du problème (7.1) est écrite au sens des distributions :

$$\left\langle \frac{\partial F_{\Omega_f}}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla F_{\Omega_f}(x, t), \varphi \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \quad (7.2)$$

Où  $D(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support borné.

#### Technique de Galerkin discontinue

Elle permet de résoudre les problèmes hyperboliques à l'aide de la méthode de Galerkin standard en considérant une interpolation discontinue par élément. L'espace d'interpolation est de façon générale l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $k$  où aucune condition de continuité n'est exigée aux interfaces des éléments. L'élément  $P_0$  a été choisi pour la discrétisation de la fonction caractéristique. Si  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  est une triangulation de  $\Omega$ , l'espace d'approximation  $W_h$  des fonctions constantes par élément est défini par :

$$W_h = \left\{ w_h \in L^2(\Omega); \quad w_h|_{\Omega_e} \in P_0(\Omega_e), \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega) \right\}$$

La méthode de Galerkin discontinue est appliquée dans le cas particulier où les fonctions d'interpolation appartiennent à  $P_0(\Omega_e)$  sur chaque élément. Le problème

(7.1) est résolu de façon explicite. L'équation de transport peut alors s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial F_{\Omega_f}}{\partial t} = -v \cdot \nabla F_{\Omega_f} \quad (7.3)$$

Soit  $F_{\Omega_f}^h \in W_h$  l'approximation en espace de la fonction  $F_{\Omega_f}$ , on a :

$$F_{\Omega_f}^h = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} F^e F_{\Omega_e} \quad (7.4)$$

où  $F_{\Omega_e}$  est la fonction de base de l'espace d'approximation  $W_h$ , et  $F^e \in [0, 1]$  est la valeur approchée de la fonction  $F_{\Omega_f}$  discrétisée sur l'élément  $\Omega_e$ .

De même  $\frac{\partial F_{\Omega_f}^h}{\partial t} \in W_h$ . En effet, on peut écrire :

$$\frac{\partial F_{\Omega_f}^h}{\partial t} = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \frac{\partial(F^e F_{\Omega_e})}{\partial t} = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \frac{\partial F^e}{\partial t} F_{\Omega_e} \quad (7.5)$$

Pour toute fonction test régulière  $\varphi \in D(\Omega)$ , la formulation discrète de l'équation (7.3) s'écrit alors :

$$\left\langle \frac{\partial F_{\Omega_f}^h}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{\Omega} = - \left\langle v_h \cdot \nabla F_{\Omega_f}^h, \varphi \right\rangle_{\Omega} \quad (7.6)$$

Ce qui donne encore :

$$\sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \left\langle \frac{\partial F^e}{\partial t} F_{\Omega_e}, \varphi \right\rangle_{\Omega_e} = - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \langle v_h \cdot \nabla(F^e F_{\Omega_e}), \varphi \rangle_{\Omega_e} \quad (7.7)$$

Comme  $F_{\Omega_e} = 1$  sur  $\Omega_e$ , on a :

$$\sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \left\langle \frac{\partial F^e}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{\Omega_e} = - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \langle v_h \cdot \nabla F^e, \varphi \rangle_{\Omega_e} \quad (7.8)$$

Si on considère la dérivée au sens des distributions, on a :

$$- \left\langle v_h \cdot \nabla F_{\Omega_f}^h, \varphi \right\rangle_{\Omega} = - \left( F_{\Omega_f}^h, \nabla \cdot (v_h \varphi) \right)_{L^2(\Omega)} \quad (7.9)$$

On peut alors écrire cette équation de la façon suivante :

$$\begin{aligned} - \left( F_{\Omega_f}^h, \nabla \cdot (v_h \varphi) \right)_{L^2(\Omega)} &= - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_{\Omega_e} F^e \nabla \cdot (v_h \varphi) d\Omega \\ &= - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} F^e \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (v_h \varphi) d\Omega \end{aligned} \quad (7.10)$$

L'application du théorème de Green donne alors :

$$\begin{aligned} - \left( F_{\Omega_f}^h, \nabla \cdot (v_h \varphi) \right)_{L^2(\Omega)} &= - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} F^e \int_{\partial\Omega_e} v_h \cdot n \varphi d\Gamma \\ &= - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} F^e \sum_{Fa \in F(\Omega_e)} \int_{Fa} v \cdot n \varphi d\Gamma \\ &= - \sum_{Fa \in F(\mathcal{T}_h(\Omega))} \sum_{\Omega_e \in \epsilon(Fa)} F^e \int_{Fa} v \cdot n \varphi d\Gamma \\ &= - \sum_{Fa \in F(\mathcal{T}_h(\Omega))} [F^e] \int_{Fa} v \cdot n \varphi d\Gamma \end{aligned} \quad (7.11)$$

où  $[F^e]$  est le saut de la fonction caractéristique à travers la face  $Fa$ .

Si nous décomposons  $v_h \cdot n^{Fa}$  en sa partie négative et en sa partie positive, on a :

$$v_h \cdot n^{Fa} = (v_h \cdot n^{Fa})^- + (v_h \cdot n^{Fa})^+$$

La relation (7.11) s'écrit alors :

$$\left\langle v_h \cdot \nabla F_{\Omega_f}^h, \varphi \right\rangle_{\Omega} = - \sum_{Fa \in F(\mathcal{T}_h(\Omega))} [F^e] \int_{Fa} ((v_h \cdot n^{Fa})^- + (v_h \cdot n^{Fa})^+) \varphi d\Gamma \quad (7.12)$$

Comme la partie positive par rapport à un élément est la partie négative par rapport à l'autre puisque  $v_h$  est continue, on peut écrire la relation (7.12) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left\langle v_h \cdot \nabla F_{\Omega_f}^h, \varphi \right\rangle_{\Omega} &= - \sum_{Fa \in F(\mathcal{T}_h(\Omega))} \sum_{\Omega_e \in \epsilon(Fa)} [F^e] \int_{Fa} (v_h \cdot n^{Fa})^- \varphi d\Gamma \\ &= - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_{\partial\Omega_e} [F^e] (v_h \cdot n^{Fa})^- \varphi d\Gamma \end{aligned} \quad (7.13)$$

Où  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega_e$ .

On définit alors la formulation faible discrète pour toute fonction test  $F^* \in W_h$  de la manière suivante :

$$\sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_{\Omega_e} \frac{\partial F^e}{\partial t} F^* d\Omega = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_{\partial\Omega_e} [F^e] (v_h \cdot n)^- F^* d\Gamma, \quad \forall F^* \in W_h \quad (7.14)$$

Si on prend  $F^* = F_{\Omega_e}$ , alors l'interpolation associée au problème (7.1) consiste à résoudre sur chaque  $\Omega_e$  le problème suivant :

Pour tout  $\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ , trouver  $\frac{\partial F^e}{\partial t} \in W_h$  tel que :

$$\frac{\partial F^e}{\partial t} |\Omega_e| = \int_{\partial\Omega_e} [F^e] (v_h \cdot n)^- d\Gamma \quad (7.15)$$

Où  $|\Omega_e|$  est le volume de l'élément  $\Omega_e$ .

Cette dernière équation donne la dérivée temporelle de la fonction caractéristique au temps  $t$  en tout point  $x$  de  $\Omega$ . Le schéma de discrétisation que nous allons décrire maintenant permettra d'évaluer la fonction caractéristique au temps  $t + \Delta t$ .

## Le schéma temporel

La technique utilisée est le développement de Taylor explicite de degré  $n$  de la fonction caractéristique  $F_{\Omega_f}(x, t + t)$  au voisinage de  $t$ . On a alors :

$$F_{\Omega_f}(x, t + \Delta t) = F_{\Omega_f}(x, t) + \Delta t \frac{\partial F_{\Omega_f}}{\partial t}(x, t) + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n F_{\Omega_f}}{\partial t^n}(x, t) + E_n(t) \quad (7.16)$$

où  $E_n(t)$  est l'erreur de troncature qui vaut :

$$E_n(t) = \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} F_{\Omega_f}}{\partial t^{n+1}}(x, \xi(t)) \quad \text{pour } \xi \in ]t, t + \Delta t[ \quad (7.17)$$

L'erreur est d'ordre  $n + 1$  en  $\Delta t$ , donc le schéma est d'ordre  $n$ . On a donc besoin d'exprimer les dérivées successives en temps de la fonction caractéristique  $F$  au temps  $t$ . On les exprime en fonction des dérivées spatiales grâce à l'équation (7.1). Si on suppose le champ  $v$  stationnaire, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\Omega_f}}{\partial t} &= -v \cdot \nabla F_{\Omega_f} \\ \frac{\partial^2 F_{\Omega_f}}{\partial t^2} &= -v \cdot \nabla \frac{\partial F_{\Omega_f}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \frac{\partial^{n+1} F_{\Omega_f}}{\partial t^{n+1}} = -v \cdot \nabla \frac{\partial^n F_{\Omega_f}}{\partial t^n} \end{aligned}$$

Toutes ces dérivées temporelles sont calculées à l'aide de la méthode de Galerkin discontinue. La généralisation de l'équation (7.15) conduit à :

Pour tout  $\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ , trouver  $\frac{\partial^d F^e}{\partial t^d} \in W_h$  tel que :

$$\frac{\partial^d F^e}{\partial t^d} |_{\Omega_e} = \int_{\partial\Omega_e} \left[ \frac{\partial^{d-1} F^e}{\partial t^{d-1}} \right] (v_h \cdot n)^- d\Gamma \quad (7.18)$$

La fonction caractéristique au temps  $t + \Delta t$  est alors obtenue grâce au développement de Taylor. En fixant une précision  $\epsilon$ , le pas de temps limite  $\Delta t_c$  est alors :

$$\Delta t_c = \left[ (n+1)! \epsilon \min_{\Omega_e \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \left( \left| \frac{\partial^{n+1} F^e}{\partial t^{n+1}}(x, t) \right|^{-1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right] \quad (7.19)$$

### 7.3.2 Résolution des équations mécaniques d'équilibre

#### Equation de l'écoulement

Dans Rem3D, le problème d'écoulement est le problème de Stokes généralisé : Trouver  $v(x, t)$  et  $p(x, t)$  tels que  $\forall (x, t) \in \Omega_f \times [t_0, t_f]$ , on ait :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (2\eta(\dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon}) - \nabla p = 0 \\ \nabla v = 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

Et dans le domaine vide, le problème (7.20) est prolongé par :

$$\begin{cases} v = 0 \\ p = 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

#### Conditions aux limites

##### – Condition d'entrée

Deux types de conditions sont considérées :

vitesse imposée :  $v = v_d(x)$  sur  $\Gamma_{in}$

La vitesse est calculée de manière à satisfaire un débit choisi par l'utilisateur.

pression imposée :  $v - (v \cdot n)n = 0$  et  $(\sigma n) \cdot n = -p_d$  sur  $\Gamma_{in}$

Où  $p_d$  désigne une pression statique donnée par l'utilisateur.

##### – Condition en paroi

Sur les parois du moule  $\Gamma_c$ , une condition de contact collant est imposée :  $v = 0$

##### – Conditions de symétrie

Sur les éventuels plans de symétrie, les conditions mixtes sont imposées :  $v \cdot n = 0$  et  $\sigma_n - (\sigma_n n) \cdot n = 0$  sur  $\Gamma_{in}$ , où  $\sigma_n = \sigma_n n$

## Formulation faible continue

Notons  $\mathcal{V} = (H_1^1(\Omega))^3 = \{v \in (H_1^1(\Omega))^3; v = 0 \text{ sur } \Gamma_c, v - (v \cdot n - n = 0 \text{ sur } \Gamma_{in})\}$ , et  $\mathcal{Q} = L^2(\Omega)$ , la formulation variationnelle des équations du problème (7.21) s'écrit :

Trouver  $(v, p) \in \mathcal{V}$  tel que  $\forall (v^*, p^*) \in (H_1^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega_f)$ , on ait :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_f} 2\eta(\dot{\varepsilon}(v))\dot{\varepsilon}(v) : \dot{\varepsilon}(v^*)d\Omega - \int_{\Omega_f} p\nabla \cdot v^*d\Omega = - \int_{\Gamma_{in}} p_d n \cdot v^*d\Gamma \\ \int_{\Omega_f} p^* \nabla \cdot v d\Omega = 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

Ainsi formulées, les équations du problème (7.22) ont un domaine d'intégration qui évolue. C'est pourquoi on les réécrit sur tout le domaine grâce à la fonction caractéristique du domaine fluide :

Trouver  $(v, p)$  tel que  $\forall (v^*, p^*) \in (H_1^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega_f)$ , on ait :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_f} F_{\Omega_f} 2\eta(\dot{\varepsilon}(v))\dot{\varepsilon}(v) : \dot{\varepsilon}(v^*)d\Omega - \int_{\Omega_f} F_{\Omega_f} p\nabla \cdot v^*d\Omega = - \int_{\Gamma_{in}} F_{\Omega_f} p_d n \cdot v^*d\Gamma \\ \int_{\Omega_f} F_{\Omega_f} p^* \nabla \cdot v d\Omega = 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

De même, dans le sous-domaine vide on a :

Trouver  $(v, p)$  tel que  $\forall (v^*, p^*) \in (L^2(\Omega_v))^3 \times L^2(\Omega_v)$ , on ait :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_v} v \cdot v^*d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_v} p \cdot p^*d\Omega = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

En écrivant le problème (7.24) sur tout le domaine, on obtient :

Trouver  $(v, p)$  tel que  $\forall (v^*, p^*) \in (L_1^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega_f)$ , on ait :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_v} (1 - F_{\Omega_f})v \cdot v^*d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_v} (1 - F_{\Omega_f})p \cdot p^*d\Omega = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

Le problème de Stokes avec prolongement sur tout le domaine s'écrit alors :

Trouver  $(v, p)$  tel que  $\forall (v^*, p^*) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega_f)$ , on ait :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} F_{\Omega_f} 2\eta(\dot{\varepsilon}(v))\dot{\varepsilon}(v) : \dot{\varepsilon}(v^*)d\Omega - \int_{\Omega} F_{\Omega_f} p\nabla \cdot v^*d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega} \alpha_v (1 - F_{\Omega_f})v \cdot v^*d\Omega = - \int_{\Gamma_{in}} F_{\Omega_f} p_d n \cdot v^*d\Gamma \\ - \int_{\Omega_f} F_{\Omega_f} p^* \nabla \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \alpha_p (1 - F_{\Omega_f})pp^*d\Omega = 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

Où  $\alpha_p$  et  $\alpha_v$  sont des facteurs de dimensionnement. La résolution de ce système permet de connaître la vitesse et la pression dans la cavité à remplir.

## Formulation faible discrétisée

On définit sur la triangulation  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  des fonctions de base qui nous assurent que  $V_h \subset \mathcal{V}$  et  $Q_h \subset \mathcal{Q}$ . La méthode de Galerkin nous donne alors :

Trouver  $(v_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  tel que  $\forall (v_h^*, p_h^*) \in V_h \times Q_h$ , on ait :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} F_{\Omega_f}^h 2\eta(\dot{\varepsilon}(v_h))\dot{\varepsilon}(v_h) : \dot{\varepsilon}(v_h^*)d\Omega - \int_{\Omega} F_{\Omega_f}^h p_h \nabla \cdot v_h^*d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega} \alpha_v (1 - F_{\Omega_f}^h)v_h \cdot v_h^*d\Omega = - \int_{\Gamma_{in}} F_{\Omega_f}^h p_d n \cdot v_h^*d\Gamma \\ - \int_{\Omega_f} F_{\Omega_f}^h p_h^* \nabla \cdot v_h d\Omega - \int_{\Omega} \alpha_p (1 - F_{\Omega_f}^h)p_h p_h^*d\Omega = 0 \end{cases} \quad (7.27)$$

Le théorème de Brezzi-Babuska nous assure, pour un choix judicieux de  $V_h$  et  $Q_h$ , l'existence d'une solution unique pour le problème discret (7.27). Le solveur, qui est le même que celui de *R3* et de *Forge3*, utilise l'élément fini *P1 + /P1* encore

appelé mini-élément introduit par Arnold et al [4] [46]. Pour plus de détail, on peut se référer aux thèses de Stéphane Marie [87] et de Elisabeth Pichelin [102].

## 7.4 Introduction des termes d'inertie

On part des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible écrite sur le domaine fluide :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho \frac{dv}{dt} - \nabla \cdot (2\eta(\dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon}(v)) + \nabla p & = & \rho g \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot v & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ v & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_v \\ p & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_v \\ + \text{Conditions aux limites} & & \\ + \text{Condition initiale} & & \end{array} \right. \quad (7.28)$$

En formulation eulérienne, la dérivée particulaire pour une particule  $v$  attachée au fluide s'écrit :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v \quad (7.29)$$

Où  $\gamma$  représente l'accélération.

L'équation (7.28) peut alors se réécrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\nabla v)v - \nabla \cdot (2\eta(\dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon}(v)) + \nabla p & = & \rho g \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot v & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions aux limites} & & \\ + \text{Condition initiale} & & \end{array} \right. \quad (7.30)$$

### Explicitation de l'accélération

C'est la première approche que nous avons implémentée dans Rem3D. Elle consiste à considérer l'accélération comme une fonction constante par élément. On peut ainsi la renvoyer au second membre de l'équation (7.28) et la considérer comme une force extérieure. Le problème (7.30) peut alors se réécrire sous la forme suivante : Trouver  $(v, p)$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla \cdot (2\eta(\dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon}(v)) + \nabla p & = & \rho(g - \gamma) \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot v & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \gamma & = & \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v \quad \text{dans } \Omega_f \\ + \text{Conditions aux limites} & & \\ + \text{Condition initiale} & & \end{array} \right. \quad (7.31)$$

#### – Formulation variationnelle du problème avec prolongement

La formulation variationnelle du problème (7.31) s'écrit alors :

Trouver  $(v, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  tel que  $\forall (v^*, p^*) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ , on ait :

$$\left\{ \begin{array}{lll} a(v, v^*) + b(p, v^*) + \int_{\Omega} \alpha_v (1 - F_{\Omega_f}) v \cdot v^* d\Omega & = & f(v^*) \quad \text{dans } \Omega_f \\ b(p^*, v) + \int_{\Omega} \alpha_p (1 - F_{\Omega_f}) p p^* d\Omega & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ + \text{Conditions aux limites} & & \\ + \text{Condition initiale} & & \end{array} \right. \quad (7.32)$$



Avec

$$a(v, v^*) = \int_{\Omega} 2F_{\Omega_f} \eta(\dot{\varepsilon}) \dot{\varepsilon}(v) : \dot{\varepsilon}(v^*) d\Omega$$

$$b(p, v) = \int_{\Omega} F_{\Omega_f} p \nabla \cdot v d\Omega$$

$$f(v) = \int_{\Omega} F_{\Omega_f} \rho(g - \gamma) v d\Omega$$

$\alpha_v$  et  $\alpha_p$  sont des facteurs de dimensionnement

– **Formulation faible discrète**

Comme précédemment pour le problème de Stokes, on choisit les espaces d'approximation  $V_h \subset \mathcal{V}$  et  $Q_h \subset \mathcal{Q}$ . Le problème discret est alors :

Trouver  $(v_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  tel que  $\forall (v_h^*, p_h^*) \in V_h \times Q_h$ , on ait :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(v_h, v_h^*) + b(p_h, v_h^*) + \int_{\Omega} \alpha_v (1 - F_{\Omega_f}^h) v_h \cdot v_h^* d\Omega & = f(v_h^*) \quad \text{dans } \Omega \\ b(p_h^*, v_h) + \int_{\Omega} \alpha_p (1 - F_{\Omega_f}^h) p_h p_h^* d\Omega & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions aux limites} & \\ + \text{Condition initiale} & \end{array} \right. \quad (7.33)$$

– **Formulation mixte avec le mini-élément**

Comme précédemment, on utilise le mini-élément. On choisit les espaces d'approximation  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$  tels que définis au chapitre 4. La condition de Brezzi-Babuska est alors vérifiée et le problème discret est bien posé. Le problème discret se réécrit alors :

Trouver  $(v_h, b_h, p_h) \in V_h \times B_h \times Q_h$  tel que  $\forall (v_h^*, b_h^*, p_h^*) \in V_h \times B_h \times Q_h$ , on ait :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(v_h + b_h, v_h^* + b_h^*) + b(p_h, v_h^* + b_h^*) \\ + \int_{\Omega} \alpha_v (1 - F_{\Omega_f}^h) (v_h + b_h) \cdot (v_h^* + b_h^*) d\Omega & = f(v_h^* + b_h^*) \quad \text{dans } \Omega \\ b(p_h^*, v_h + b_h) + \int_{\Omega} \alpha_p (1 - F_{\Omega_f}^h) p_h p_h^* d\Omega & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions aux limites} & \\ + \text{Condition initiale} & \end{array} \right. \quad (7.34)$$

Ce qui peut encore s'écrire : Trouver  $(v_h, b_h, p_h) \in V_h \times B_h \times Q_h$  tel que  $\forall (v_h^*, b_h^*, p_h^*) \in V_h \times B_h \times Q_h$ , on ait :

$$\left\{ \begin{array}{lll} a(v_h, v_h^*) + b(p_h, v_h^*) & = f(v_h^*) & \text{dans } \Omega \\ a(b_h, b_h^*) + b(p_h, b_h^*) & = f(b_h^*) & \text{dans } \Omega \\ b(p_h^*, v_h) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ b(p_h^*, b_h) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions aux limites} & & \\ + \text{Condition initiale} & & \end{array} \right. \quad (7.35)$$

– **Calcul de l'accélération**

La discrétisation de  $f(v_h)$ , second membre du problème discret sur la triangulation  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  est réalisée élément par élément grâce à la méthode de Galerkin discontinue. On obtient alors pour l'accélération :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\Omega_e} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v \nabla \bar{v} \\ &= \frac{\bar{v}_t^e - \bar{v}_{t-\Delta t}^e}{\Delta t} + \frac{1}{|\Omega_e|} \sum_{Fa \in \Omega_e} (\bar{v}_t^e - \bar{v}_t^{K(Fa)}) (n^{Fa} \cdot v^{Fa})^- \end{aligned} \quad (7.36)$$

Où  $\Omega_e$  est un tétraèdre de la discrétisation,

$|\Omega_e|$  est le volume de l'élément  $\Omega_e$ ,

$Fa$  est une face de l'élément  $\Omega_e$ ,  
 $K(Fa)$  est le tétraèdre partageant la face  $Fa$  avec  $\Omega_e$ ,  
 $n^{Fa}$  la normale sortante à la face  $Fa$ ,  
 $v^{Fa}$  la vitesse barycentrique de la face  $F = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 V^i$ ,  
 $\bar{v}_e$  est la vitesse moyenne de l'élément  $\Omega_e$ , c'est-à-dire l'interpolé du champ de vitesse nodal au centre de l'élément  $\Omega_e$ .

## 7.5 Simulation de l'injection de pièces industrielles

### 7.5.1 Simulation du remplissage du SIMULACRO

Suite à cette adaptation de Rem3D au remplissage de moules en conditions dynamiques, nous l'avons appliqué au remplissage de pièces industrielles. La première pièce dont nous avons simulé le remplissage est le SIMULACRO présenté au chapitre 4 et dont on présente une CAO (figure 4.9), CAO réalisée à l'aide du logiciel IDEAS. Cette CAO représente la pièce augmentée de son canal d'injection.

Sur la figure (7.1) nous pouvons observer le maillage de la pièce. Le maillage surfacique initial a été réalisé à l'aide du logiciel IDEAS. Ensuite, ce maillage surfacique a été raffiné, puis le maillage volumique a été réalisé à l'aide du mailleur MTC développé au CEMEF. Nous avons fait un maillage anisotrope de la pièce de manière à avoir des mailles allongées dans les zones de très faible section. Le maillage réalisé comporte 21000 nœuds et 100000 tétraèdres. Pour la simulation du remplissage de cette pièce, nous avons considéré que le contact entre la matière qui s'écoule et le moule était collant, ce qui se traduit mécaniquement par la condition  $v = 0$  sur la zone de contact du matériau. Au début de la simulation, une petite zone dans le canal d'injection est supposée remplie. La rhéologie du matériau est celle identifiée au chapitre 3. La zone d'injection est modélisée par un plan sur lequel une pression est imposée tout au long de la simulation, ce qui correspond aux conditions du procédé où une pression faisant varier la vitesse du piston est imposée. Le temps de calcul est de 20 heures environ sur un processeur d'un Sun4000 à quatre processeurs. Le pas de temps moyen est de  $10^{-2}s$ . La figure (7.2) présente la comparaison des simulations obtenues à l'aide du code Rem3D (colonne de gauche) et des expériences d'injection interrompues réalisées par le partenaire STAMPAL. Les résultats de simulation numérique sont en fait les éléments du maillage pour lesquels la fonction caractéristique a une valeur non nulle. Nous rappelons que la fonction caractéristique a une valeur de 1 dans les mailles complètement remplies par le fluide et de 0 dans les mailles où il n'y a pas de fluide. Nous pouvons observer que la forme de l'écoulement est sensiblement la même, et ce, malgré l'approximation faite sur le contact avec la paroi. Néanmoins, on peut observer que l'écoulement est différent au début du remplissage du moule. Dans la réalité, le fluide va d'abord jusqu'au fond du moule et, ensuite, il s'écoule latéralement. Cette différence est probablement due au contact qui est collant dans le code de simulation REM3D.

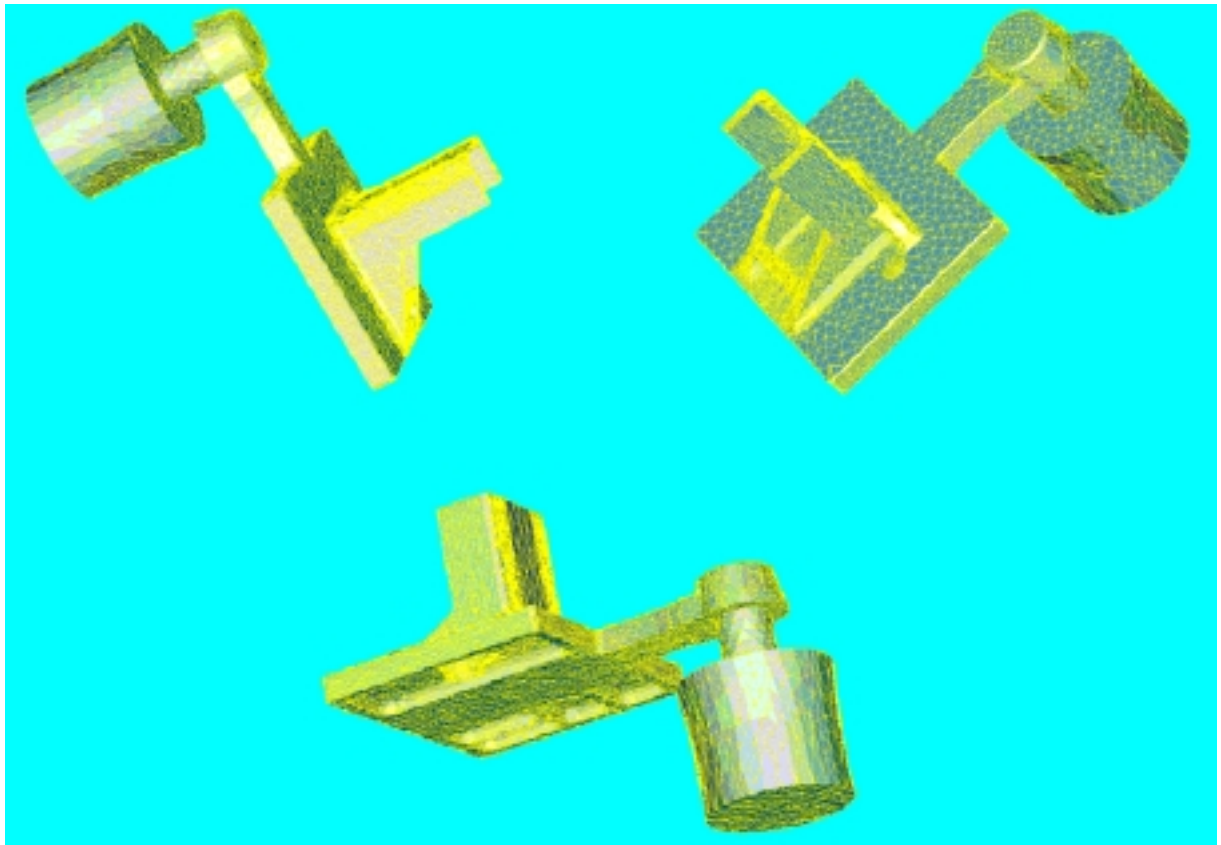


FIG. 7.1 – Vues du maillage anisotrope du SIMULACRO

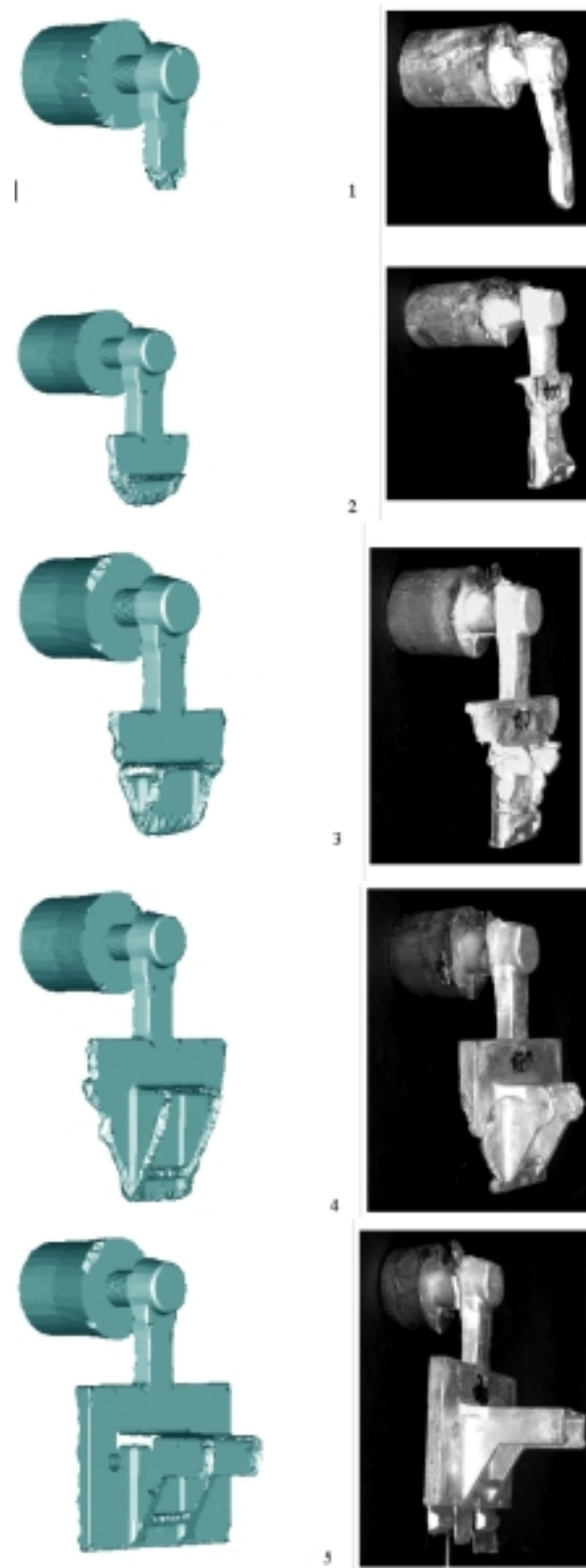


FIG. 7.2 – Comparaison simulations (gauche)/expériences d'injections interrompues (droite) sur le SIMULACRO

### 7.5.2 Remplissage de la pièce EADS

La seconde pièce industrielle dont nous avons simulé le remplissage est un crochet de fermeture de la soute d'un avion que nous appellerons simplement pièce EADS. C'est une pièce très mince et allongée, comme on peut le voir sur la figure (7.3), représentant la CAO de la pièce. La CAO de cette pièce a été faite à l'aide du logiciel IDEAS. Ensuite, comme pour la pièce SIMULACRO, le maillage surfacique a été

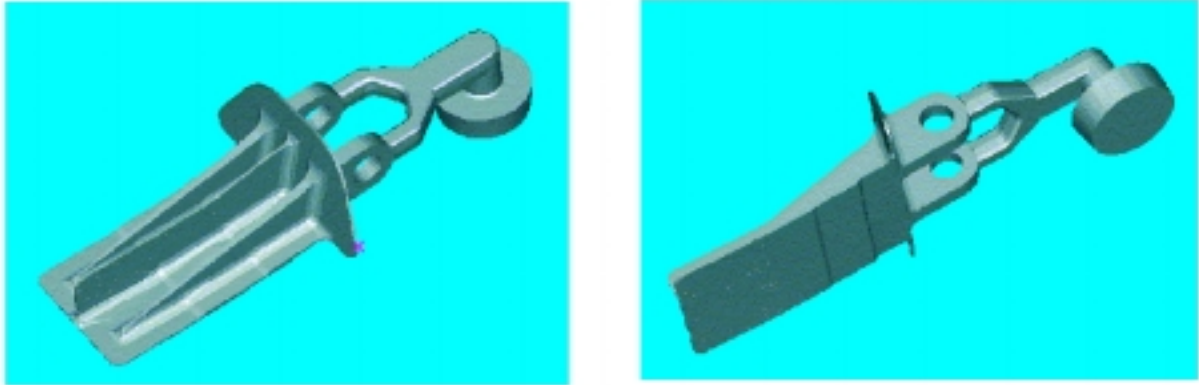


FIG. 7.3 – CAO du crochet de soute proposé par EADS dans le projet européen ADFORM

réalisé à l'aide du logiciel IDEAS et nous avons procédé à son raffinement à l'aide du logiciel MTC. Nous avons alors réalisé le maillage volumique à l'aide du logiciel MTC. On peut observer (figure 7.4) le maillage de la pièce EADS. Ce maillage est aussi anisotrope, compte tenu de la forme mince et allongée de la pièce. Il contient 24000 noeuds et 96000 tétraèdres. Le matériau injecté est un alliage d'aluminium A356 ayant la rhéologie identifiée au chapitre 3. Pour la simulation du remplissage de cette pièce, nous avons considéré, comme pour la pièce SIMULACRO, que le contact avec les parois du moule est collant, et donc, que la vitesse est nulle pour les noeuds au contact de la paroi. De même, au début de la simulation, une petite zone dans le canal d'injection est supposée remplie. La zone d'injection est toujours modélisée par un plan sur lequel une pression est imposée tout au long de la simulation, ce qui correspond aux conditions du procédé où une pression faisant varier la vitesse du piston est imposée. Les figures (7.5 et 7.6) présentent la comparaison des simulations obtenues à l'aide du code Rem3D et des expériences d'injection interrompues réalisées par le partenaire STAMPAL. Nous pouvons également observer que la forme de l'écoulement est sensiblement la même. Ce calcul a pris 30 heures CPU environ sur un processeur d'un Sun4000 à quatre processeurs.

La figure (7.7) montre quant à elle la distribution de la pression à travers la pièce. On peut constater que la pression décroît de la zone d'injection à la surface libre.

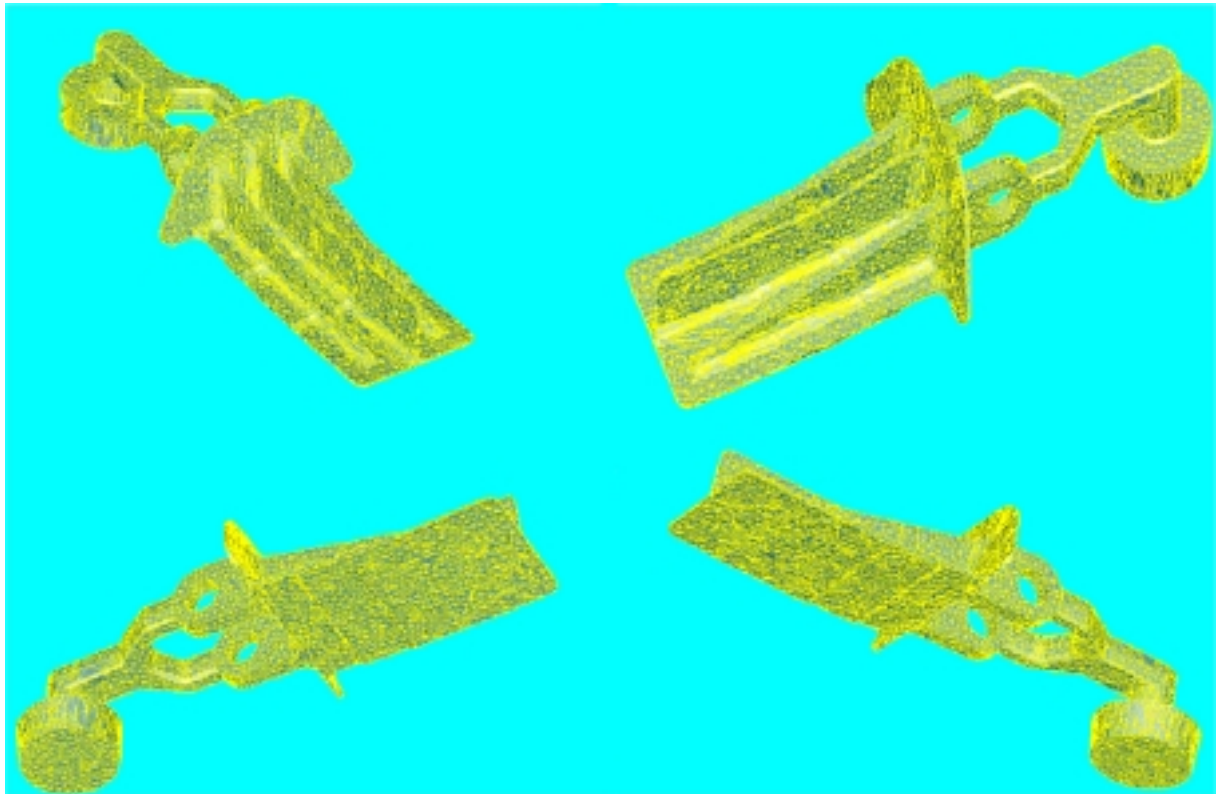


FIG. 7.4 – Maillage volumique anisotrope réalisée avec le mailleur automatique MTC du Cemef

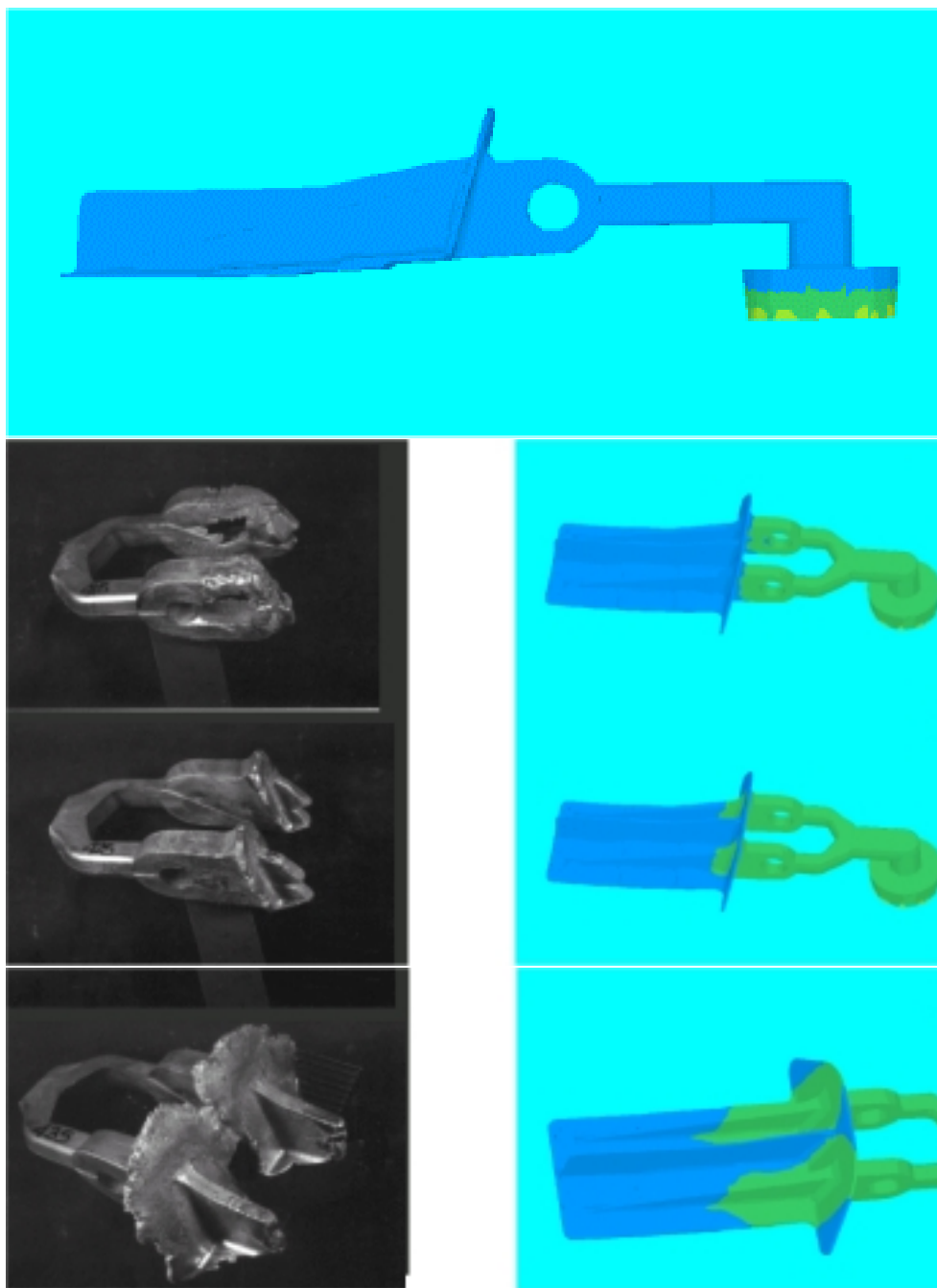


FIG. 7.5 – Comparaison simulations (droite)/expériences d'injections interrompues (gauche) sur la pièce EADS

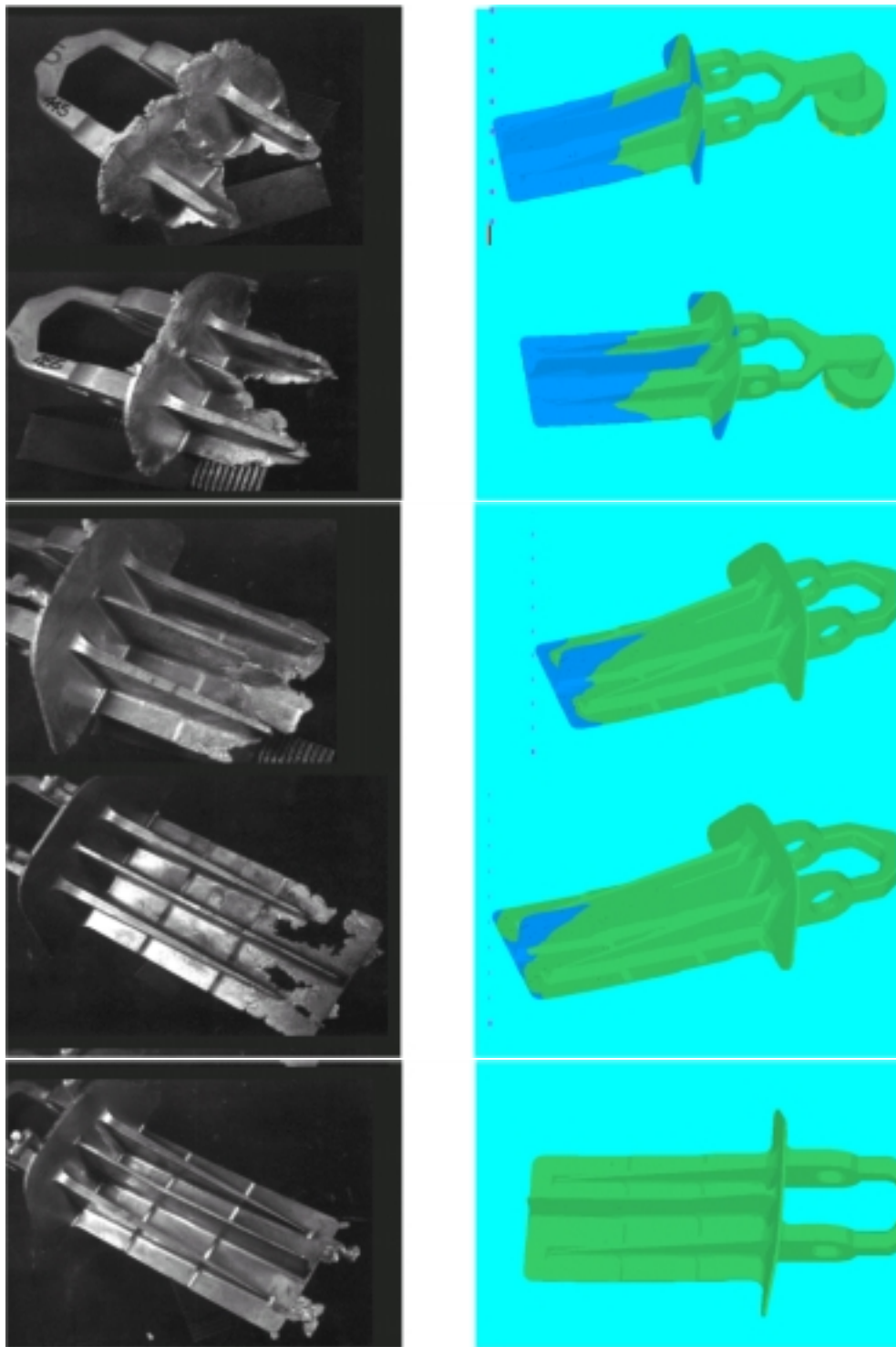


FIG. 7.6 – Comparaison simulations (droite)/expériences d'injections interrompues (gauche) sur la pièce EADS



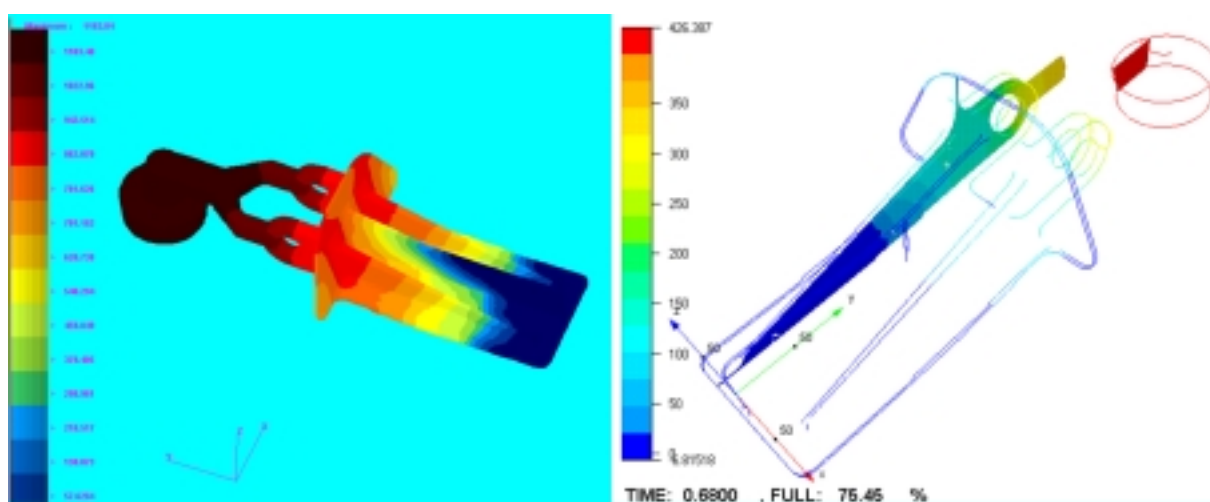


FIG. 7.7 – Visualisation du champ de pression (a) sur la pièce de EADS et (b) sur une coupe de la même pièce

# Chapitre 8

## CONCLUSION

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet européen ADFORM (Advanced semisolid forming of complex structural components). L'objectif de ce projet pour le CEMEF était de développer un code de calcul capable d'effectuer la simulation numérique de l'injection de métaux à l'état semi-solide. Pour atteindre cet objectif, nous avons travaillé dans deux principaux axes : sur le plan expérimental, il y a eu la mise au point et la réalisation d'expériences rhéologiques, puis l'identification du comportement d'un alliage d'aluminium (A356) à l'état semi-solide, et sur le plan purement numérique, il y a eu l'adaptation de deux codes de calcul à la simulation de l'injection de métaux à l'état semi-solide.

### 8.1 Les acquis du travail

Notre travail dans un premier temps nous a conduits à présenter les principales classes de loi utilisées dans la littérature pour modéliser le comportement des métaux à l'état semi-solide. De cette étude il ressort que le comportement de métaux à l'état semi-solide dépend fortement de la fraction de solide. Ainsi, pour des fractions de solide faibles ou moyennes, le métal a un comportement de type fluide. Les lois de comportement utilisées pour modéliser ce comportement sont issues de l'étude des suspensions. Lorsqu'on soumet le matériau à un cisaillement, il présente un comportement thixotrope. Pour des fractions de solide élevées, un squelette solide est constitué et les auteurs considèrent alors le métal semi-solide comme un matériau poreux saturé de liquide. Ainsi, le squelette solide de ces matériaux subit des déformations viscoplastiques qui provoquent l'écoulement du fluide. Au terme de cette partie, il apparaît que pour des fractions de solide proches de la limite de validité des deux approches comportementales, on a à la fois un comportement thixotrope pendant le régime transitoire et la ségrégation du liquide. Nous avons alors choisi d'utiliser une loi de comportement viscoplastique, loi présentant un bon compromis entre le comportement réel du matériau et les possibilités actuelles de simulation numérique, notamment pour son application aux calculs tridimensionnels.

L'étape suivante a alors été la réalisation d'essais instrumentés et l'identification des paramètres de la loi. Nous avons ainsi été amenés à concevoir et à réaliser un

montage expérimental permettant l'injection radiale du matériau semi-solide dans un disque. Après nous être heurtés à de nombreuses difficultés pratiques, qui nous ont amenés à modifier significativement le montage initial, cette expérience nous a finalement donné satisfaction dans la mesure où elle nous a permis de réaliser des injections relativement bien contrôlées. En modélisant l'essai avec le logiciel Forge2 et en procédant par essai-erreur, nous avons alors réalisé l'identification des paramètres d'une loi viscoplastique dans l'intervalle de solidification de l'alliage A356. Ceci nous a permis de trouver pour notre cas des paramètres en concordance avec ceux disponibles dans la bibliographie et d'obtenir un accord raisonnable entre simulation numérique et mesures sur l'ensemble des essais effectués.

En parallèle avec cette identification rhéologique, nous avons alors entamé l'adaptation de nos codes de calcul de manière à pouvoir simuler le procédé d'injection en trois dimensions. Le premier code sur lequel nous avons travaillé est le code R3, code issu de Forge3 et adapté à la simulation numérique du remplissage de moules de fonderie. Il utilise une formulation lagrangienne réactualisée pour la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires, avec la prise en compte des effets de gravité, de surface libre et d'inertie. Nous y avons développé un module de contact matière/matière et amélioré le module de contact matière/outil. Pour le contact matière/outil, nous avons développé un module de contact bilatéral glissant et collant, en utilisant la méthode de pénalisation. Pour le contact matière/matière et par soucis de simplicité, nous avons programmé une méthode maître/esclave symétrique. Cette méthode consiste à imposer la condition de contact sur les deux frontières du domaine. Ainsi, on corrige les défauts liés à la formulation maître/esclave standard, mais au prix d'un écoulement artificiellement rigidifié, ce qui, dans la pratique, n'a pas semblé particulièrement pénalisant. La condition de contact a été imposée par la méthode de pénalisation. Les résultats de cette étape sont assez satisfaisants et on a constaté que la condition de contact était bien imposée. Nous avons alors étudié le conditionnement de la matrice hessienne obtenue par cette approche. De cette étude, il ressort que la matrice hessienne est particulièrement mal conditionnée. L'ajout de la condition de contact se traduit par l'insertion de composantes extra-diagonales de même ordre de grandeur que les termes diagonaux, et donc par la perte de la propriété de dominance diagonale. Numériquement, cela se traduit par une augmentation notable du nombre d'itérations du solveur itératif. Comme les préconditionneurs à disposition étaient des préconditionneurs diagonaux ou blocs diagonaux, nous avons développé le changement de variable orthogonal de Gramm Schmidt pour condenser les termes ajoutés par la condition de contact sur la diagonale. Cette approche n'est valable que dans le cas où les maillages sont coïncidents. Ensuite, dans le cas général, nous avons introduit le préconditionneur par factorisation incomplète de Crout. Les résultats numériques montrent un gain notable d'un facteur 10 par rapport aux préconditionneurs diagonaux, en terme de nombre d'itérations du solveur itératif, et davantage encore lorsque le problème est mal conditionné. L'étape suivante de notre travail a donc été tout naturellement son application aux cas de remplissage des moules de fonderie, étape à laquelle nous

nous sommes attaqués sans grand succès. En effet, les fortes déformations que subit le maillage au cours du remplissage de moules, déformations conduisant à la dégradation à terme de la qualité surfacique du maillage, ont causé l'échec du remaillleur automatique dans sa tentative d'améliorer la qualité du maillage. Aussi, avons nous décidé de travailler sur l'amélioration de la formulation eulérienne lagrangienne arbitraire et sur le contrôle de la procédure de remaillage, et ceci, pour mieux contrôler les dégradations du maillage et essayer de les corriger a priori. Nous avons ajouté à la formulation eulérienne lagrangienne des conditions aux limites particulières pour limiter la dégradation de la qualité du maillage. Le but était d'avoir près de la surface libre un maillage quasi-lagrangien et loin de la surface libre un maillage quasi-eulérien. Ainsi, les zones de forte déformation du maillage sont limitées à la surface libre. Cependant, malgré ces efforts, nous avons buté sur la dégradation du maillage et l'échec du remaillleur automatique lorsque les éléments étaient trop distordus. Devant ce constat, nous avons alors décidé d'abandonner la formulation lagrangienne réactualisée et de changer de méthode de simulation pour passer à une approche purement eulérienne grâce au logiciel Rem3D.

Rem3D, comme R3 est un code issu de Forge3, mais développé initialement pour l'injection de thermoplastiques. Il utilise une formulation eulérienne et permet la résolution des équations de Stokes instationnaires avec prise en compte des échanges thermiques dans le matériau et dans l'outillage. La formulation eulérienne utilise la méthode VOF et la méthode de Galerkin discontinue pour la résolution des équations de transport, aussi bien pour la surface libre que pour l'équation de la chaleur. Nous avons travaillé au développement de l'ajout des termes d'inertie en calculant le gradient de vitesse par une méthode de Galerkin discontinue, ainsi que des termes de gravité. Le logiciel dans son état actuel, est apte à la simulation numérique de l'injection de métaux à l'état semi-solide. Les résultats obtenus en remplissage de moule montrent une bonne concordance avec le procédé industriel et le logiciel peut constituer un outil précieux d'aide à la conception.

## 8.2 Perspectives

Les perspectives de ce travail sont nombreuses et peuvent se diviser en trois parties.

### 8.2.1 Caractérisation de la rhéologie

- l'utilisation de l'analyse inverse pour déterminer de manière plus précise les paramètres du modèle. On pourrait ainsi identifier le comportement sur des modèles plus complexes, par exemple des modèles biphasés prenant en compte la thixotropie du matériau pendant la phase transitoire. Malheureusement, pour l'instant, de tels modèles ne sont pas disponibles dans la bibliographie. Un axe de recherche intéressant serait donc la détermination d'un modèle de

comportement prenant en compte la thixotropie du matériau et la ségrégation du liquide au cours de l'écoulement.

### **8.2.2 Amélioration de la simulation numérique du procédé**

Sur le plan de l'amélioration de la simulation numérique, on peut citer au chapitre des perspectives :

- la validation de la prise en compte de la thermique au cours de l'écoulement sur des essais instrumentés de remplissage de moules.
- l'implémentation d'un formalisme biphasique.

### **8.2.3 Exploitation de la simulation pour optimiser le procédé**

Sur le plan de l'exploitation de la simulation numérique pour optimiser le procédé d'injection de métaux à l'état semi-solide, certains aspects restent à développer au nombre des quels on peut citer :

- le contrôle de la vitesse d'injection, dans le but d'avoir un écoulement laminaire dans le moule. En effet, des vitesses d'injections trop élevées causent un écoulement turbulent, phénomène à l'origine de l'emprisonnement des poches d'air dans le matériau, et donc des porosités dans la pièce finale. Il est donc important de pouvoir contrôler la vitesse d'injection en fonction du moule à remplir, au besoin à l'aide de la simulation numérique, de manière à avoir un écoulement laminaire dans toutes les sections du moule.
- l'optimisation de la forme du canal d'injection et du piston de telle sorte que les oxydes ne se retrouvent pas dans le moule. Cette optimisation peut également se faire à l'aide de la simulation numérique. Ainsi, des marqueurs pourraient être utilisés pour déterminer le trajet de certaines zones du canal d'injection, et l'utilisation de l'optimisation de forme pourrait déterminer la forme optimale du piston pour que ces zones ne se retrouvent pas dans la pièce.

# Bibliographie

- [1] Abouaf M ; *Thèse de doctorat INPG-1985*
- [2] Agassant Jean-François, Pierre Avenas, Jean Philippe Sergent, Bruno Vergnes et Michel Vincent ; *La mise en forme des matières plastiques* (1996)
- [3] Apaydin N., Prabhakar K. V., Doherty R.D. ; *Special grain boundaries in rheo-cast Al-Mg*; Mat. Sci. Engng., 46, pp. 145-150, (1980)
- [4] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin ; *A stable finite element for Stokes equations*, Calcolo, 21 (1984), pp. 337-344
- [5] Bahloul-Massip Chantal ; *Etude numérique des phénomènes thermomécaniques pour la simulation tridimensionnelle du remplissage des moules de fonderie* Thèse de doctorat Ecole des Mines de Paris (2000)
- [6] Barlier J. ; *Caractérisation de l'acier à l'état semi-solide : étude expérimentale et modélisation*; Rapport de projet, Mars 1997
- [7] Batchelor G. K. ; *Journal of fluid mechanics*; Vol 41, pp. 545, (1970)
- [8] Batchelor G. K. ; *Journal of fluid mechanics*; Vol 52, pp. 245, (1972)
- [9] Batchelor G. K. ; *Ann. Rev. Fluid Mechanics*; Vol 6, pp. 227, (1974)
- [10] Bauer W. H., Collins E. A., *Thixotropy and dilatancy*, Rheology, Theory and applications, Vol.4, Ed F.R., Eirich, Academic Press, New York, 1967
- [11] Bellet M. ; *Méthodes eulériennes-lagrangiennes. Application au remplissage des moules de fonderie*; Séminaires de plasticité : Eléments finis et mise en forme des métaux ; CEMEF-Ecole des mines de Paris ; 1994
- [12] Bellet M. ; *Mécanique et thermique des milieux continus*; Séminaires de plasticité : Eléments finis et mise en forme des métaux ; CEMEF-Ecole des Mines de Paris ; 1994
- [13] Bellet M. ; *Implementation of surface tension with wall adhesion effects in a three-dimensional finite element model for fluid flow*; Numerical methods in engineering ; 2001
- [14] Benson D. J. ; *An U-ALE formulation of 3-D unsteady viscoelastic flow*; Computer methods in applied mechanics and Engineering, 72, pp. 305-350, (1989)
- [15] Brackbill J. U., Kothe D. B., and Zemach C., *A continuum method for modeling surface tension*, Journal of Computational physics, 100 (1992), pp. 335-354

- [16] Brook A. N., Hugues T. J. R.; *Streamline upwind/Petrov Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier Stokes equations*; Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 32, 199-259 (1982)
- [17] Campbell J.; *Castings*; Butterworth - Heinemann, Oxford; 1991
- [18] Cescotto Serge, Charlier Robert, *Frictional contact finite elements based on the mixed variational principles*, International Journal for numerical methods in engineering 36 : 1681-1701, 1993
- [19] Charreyron Pierre-Olivier; *Contribution à l'étude rhéologique des alliages semi-solides dendritiques*, Thèse Ecole des Mines de Paris 1983
- [20] Chen S. C., Chen N.T., Hsu K.H., Ksu K.F.; *Study of polymer melt flow in sequential injection molding process*; AIChE Journal, vol. 42, n° 6, pp. 1706-1714 (1996)
- [21] Cheng D.C.H., Evans F., *Phenomenological characterisation of the rheological behaviour of inelastic reversible thixotropic and antithixotropic fluids*, Brit. J. Appl. Phys, Vol. 16, pp1599-1617, 1965
- [22] Chenot J-L. and Bellet M.; *The ale-method for the numerical simulation of material forming processes*; in Simulation of Material Processing : Theory, Methods and Applications, S.-F. Shen and P. Dawson, eds, Balkema, Rotterdam, (1995), NUMIFORM'95, pp. 39-48.
- [23] Chertier Olivier; *Contact et frottement entre solides déformables en grandes déformations*; Thèse de doctorat du Laboratoire de mécanique et d'acoustique de Marseille (1999)
- [24] Ching-Rong Huang; *Characterization of thixotropic fluids*; Flow dynamics and Transport phenomena, Encyclopedia of fluid mechanics; vol 7; Nicholas P.;
- [25] Collot J.; *Les différentes technique de préparation et de mise en forme à l'état semi-solide des alliages métalliques : application au magnésium*; Fonderie et fondeur d'aujourd'hui, n129, pp. 35-46, 1993
- [26] Collot J.; *L'état semi-solide ou semi-liquide : propriétés, mise en forme et procédés*; Cours Mastère matériaux et mise en forme, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, 1996
- [27] Collot J.; *Marques déposées : "GIRCAST" 1982, "P.I.D." (pressure ingots die casting) 1994, "THIXOMAG", 2000*
- [28] Collot J.; *Review of new process technologies in aluminium die Casting industry*; International conference and exhibition APPA 2001, February 2001, Berhain
- [29] Cook, R.D.; *Concepts and Applications of finite element analysis*; John Wiley, (1974)
- [30] Courniot A. and Crochet M.J.; *Finite element for numerical simulation of injection molding*; Numerical Method in Industrial Forming process (NUMIFORM), pp. 165-170 (1986)

- [31] Coupez T.; *Grandes transformations et remaillage automatique*; Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, CEMEF ; 1991
- [32] Coupez T.; *A stable stabilized finite element for 3D forming calculation*; Rapport interne, CEMEF ; 1996
- [33] Derrier Nicolas; *Modélisation d'essais mécaniques pour les métaux à l'état semi-solide avec couplage de critères de rupture*; Mémoire de Master Mécanique-Numérique, Ecole des Mines de Paris, 2000.
- [34] Doherty R. D., Lee H. I., Feest E. A.; *Microstructure of stir-cast metals*; Mat. Sci. Engng, 65, pp. 181-189, (1984)
- [35] Donea J., Fassoli Stella P., Giuliani S., Halleux J. P., Jones A. V.; *An arbitrary Lagrangian eulerian procedure for transient dynamic fluid-structure interaction problems*; Trans. 4th SMIRT conf., San Francisco, 15-19 Août 1977
- [36] Donea J.; *A Taylor-Galerkin method for convective transport problems*; Computer methods in applied Mechanics Engineering, vol. 95, pp. 169-203 (1992)
- [37] Donea J., Quartapelle L.; *An introduction to finite element methods for transient advection problems*; International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, pp. 101-119 (1984)
- [38] Dube E. and Rodrigue G.; *A geometric weighted method for 3-D unstructured ALE hydrodynamics*; presented at 5th International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Sendai, Japan (1993)
- [39] Duvaut G.; *Problème de Signorini en viscoélasticité linéaire*; C.R. Acad. Sciences, Paris, 268 (1969); pp. 1044-1046
- [40] Duvaut G. and Lions J. L.; *Les inéquations en mécanique et en physique*; Dunod; Paris (1972)
- [41] Einstein A.; *Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen*; Inaugural Dissertation, Bern 1905. See also Ann. Physik., Vol 19, (1906), pp. 298-306
- [42] Engelman M.S.; *The implementation of normal and tangential boundary conditions in finite element code for incompressible fluid flow*; International Journal of numerical methods in engineering; 1982
- [43] Flemings MC; *Solidification processing*; Mc Graw-Hill, New-York ;1974
- [44] Flemings MC; *Behavior of metal alloys in the semisolid state*; Metallurgical transactions A, 22 A; pp 957-981; May 1991
- [45] Fletcher R.; *Practical methods of optimisation, constrained optimisation*; Vol 2, John Wiler (1981)
- [46] Fortin M. and Fortin A., *Experiments with several elements for viscous incompressible flows*; International Journal of Numerical methods in fluids; Vol. 5; pp. 911-928; 1985
- [47] Fortin M. and Glowinski R.; *Augmented lagrangian methods : application to the numerical solution of boundary-value problems*; Studies in mathematics and its applications, vol. 15, (1983)



- [48] Fortin M., Glowinski R.; *Méthode du Lagrangien augmenté*; Collection méthodes mathématiques de l'informatique, Duno; Paris (1992)
- [49] Fourment L.; *Simulation d'écoulements viscoplastiques : application au forgeage à chaud*; Séminaires de plasticité : Eléments finis et mise en forme des métaux; CEMEF-Ecole des Mines de Paris; 1994
- [50] Frankel N. A., Acrivos A.; *On the viscosity of concentrated suspension of solid spheres*; Chemical Engineering Science, Vol 22, pp. 847-853, (1967)
- [51] Frederickson A.G., *A model for the thixotropy of suspensions*; AIChE journal, 436-440, 1970
- [52] Gaston L.; *Simulation numérique par Eléments finis bidimensionnels du remplissage de moules de fonderie et Etude expérimentale sur maquette hydraulique*; Thèse CEMEF- Ecole des Mines de Paris; 1997
- [53] Gebelin J.C.; *Etude expérimentale et simulation numérique du comportement de l'alliage de magnésium AZ91 à l'état semi-solide*; Thèse de doctorat INPG; 2000
- [54] C. Geindreau, J.L. Auriault; *Investigation of the viscoplastic behaviour of alloys in the semi-solid state by homogenization*; Mechanics of Materials, Vol. 31, n 8, pp.535-551, (1999).
- [55] Gladwell G.M.L.; *Contact problems in the classical theory of elasticity*; Sijthoff and Noordhoff International Publishers B.V. Alphen aan Rijn, Netherlands (1980)
- [56] Glowinski R., Lions J.L., and Trémolière R.; *Analyse numérique des inéquations variationnelles*; Tomes 1, 2, Dunod, Paris, 1976
- [57] Ghoneim H.; *Simulation of balancing multi-cavity molds*; International polymer processing, vol. 1, pp. 166-173 (1987)
- [58] Haber R.; *A mixed eulerian lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics*; Computer methods in Applied Mechanics and Engineering; Vol 43, pp. 277-292 (1984)
- [59] Habraken A. M. and Cescotto S.; *Contact between deformable solids. The fully coupled approched*; Communication interne, 1998
- [60] Hervieux Olof; *Thixoformage par coulée sous pression : application aux alliages d'aluminium et de magnésium*; Thèse de doctorat de l'école des Mines de Paris, 1998
- [61] Hetu J.F., Lauzé Y., Garcia-Rejon A.; *Numerical simulation of the flow and fiber orientation in reinforced thermoplastic injection molded products*; Numerical method in Industrial Forming Processes- NUMIFORM-95 pp. 1135-1141 (1995)
- [62] Hieber C.A. et Shen S.F.; *A finite element/finite difference simulation on the injection molding filling process*; Journal of non newtonian fluid mechanics, vol. 7, pp. 1-32 (1980)

- [63] Hild P.; *Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles*; Thèse de doctorat, université Paul Sabatier de Toulouse (1998)
- [64] M. Hirai, K. Takebayashi and Y. Yoshikawa; *Effect of chemical composition on apparent viscosity of semi-solid alloys*; ISIJ int., vol. 33, n° 11, pp. 1182 - 1189, (1993)
- [65] Hirt C. W., Nichols B.D.; *Volume of fluid (VOF) method for the dynamic of free boundaries*; Journal of computational physics, vol. 39, pp. 201-225 (1981)
- [66] Hugues T. J. R., Liu W. K., Zimmerman T. K., *Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 29, pp. 329-349, (1981)
- [67] Ilegbusi OJ and Brown S; *Mold filling of semi-solid metal slurries*; Journal of materials engineering and performance, 4, pp486-493; 1995
- [68] Th. Imwinkelried; *Defect prediction by numerical modelling of the thixoforming process* Modeling of casting, welding and advanced Solidification processes IX; Edited by Peter R. Sahm, Preben N. Hansen and James G. Conley; Aachen, pp. 295-302
- [69] Jaouen Olivier; *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces de fonderie*; Thèse de doctorat, ENSMP, Décembre 1998;
- [70] Joly P.A. and Merhabian R.; *The rheology of a partially solid alloy*; J. Mater. Sc., Vol 11, pp. 1393-1418; 1976.
- [71] Kattamis T. Z., J. C. Coughlin et M. C. Flemings; *Influence of coarsening on dendrite arm spacing of aluminium-copper alloy*; TMS of AIME, 239, pp.1504-1511; 1967
- [72] Kattamis T.Z. and Piconne J.; *Rheology of semi-solid Al-4.5%Cu-1.5%Mg alloy*, Material science and engineering, A131, pp. 265 -272; (1991)
- [73] Kikuchi N. and Oden J. T.; *Contact Problem in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*; SIAM Philadelphia (1988)
- [74] Kirkwood DH; *Semisolid metal processing*; International materials reviews; ISSN 0950-6608; DA 1994; Vol 39; No 5; PP. 173-189
- [75] Kuei S.C. and Burton T.E.; *Polyfill : a flow simulation code for injection molding*; Computer in engineering, vol. 1, pp. 73-78 (1987)
- [76] Kumar P., Martin Cl, Brown S.; *Shear rate thickening flow behavior of semisolid slurries*; Metallurgical transactions. A, Physical metallurgy and materials science; DA. 1993; vol. 4; No 5; PP. 1107-1116;
- [77] Kumar P., Martin Cl, Brown S.; *Constitutive behavior of semi-solid metal alloy slurries*, mat. res. soc., 289, 213-219; 1993
- [78] Kumar P.; Martin CL, Brown S.; *Constitutive modeling and characterisation of semi-solid metal alloy slurries : 1 The flow response*; acta metall. mater., 42, no 11, pp. 3595-3602; 1994

- [79] Kurz W., Fischer D. J.; *Fundamentals of solidification*; Trans. Tech. Publ., Aedermannsdorf, Suisse, 1984
- [80] Lalli A. Lawrence; *A model of deformation and segregation of solid-liquid mixtures*; metallurgical transactions, 16A, 1393-1403 ; 1985
- [81] Lee H. I., Doherty R. D., Feest E. A. and Titchmarsh J. M.; *Structure and segregation of stircast aluminium alloys*; Solidification Technology in the Foundry and Casthouse, Metal Society, pp. 119-125 ; (1983)
- [82] Loue W. R. ; *Evolution microstructurale et comportement rhéologique d'alliages Al-Si à l'état semi-solide*; Doctorat INP Grenoble ; 1992
- [83] Liu W. K., Chang H., Chen J. S., Belytschko T. ; *ALE Petrov-Galerkin finite element for nonlinear continua*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 68, pp. 259-310, (1988)
- [84] Mada M. and Ajersch F. ; *Viscosity measurements of A356-15% sic semi-solid alloy aquizing flow viscometer*; Proc of the 2<sup>nd</sup> int. Conf. on the processing of semi-solid alloy and composites ; 1992
- [85] Magnin B., *Modélisation du remplissage des moules d'injection pour polymères thermoplastiques par une méthode eulérienne-lagrangienne arbitraire*; Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, Sophia-Antipolis, (1994)
- [86] Mal O., Dheur L., Couniot N.V.R.A. and Dupret F.; *A realistic wall thermal boundary condition for simulating the injection molding of thermoplastics*; Simulation of materials processing : Theory, methods and applications, pp. 1165-1171 (1995)
- [87] Marie S. ; *Un modèle de parallélisation SPMD pour la simulation numérique de procédé de mise en forme des matériaux*; Thèse de l'Ecole des Mines de Paris (1997)
- [88] Martin Christophe, *Rhéologie et structure d'un alliage modèle Sn-Pb à l'état semi-solide*; Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble ; 1995
- [89] Martin Christophe, Favier D., Suery M. ; *Viscoplastic behaviour of porous metallic materials saturated with liquid, part 1 : constitutive equations*; International journal of plasticity, 13 : 215-335, 1997
- [90] Martin Christophe, Favier D., Suery M. ; *Viscoplastic behaviour of porous metallic materials saturated with liquid, part 2 : experimental identification on Sn-Pb alloy*; International journal of plasticity, 13 : 237-359, 1997
- [91] Mewis J, *Thixotropy. A general review*; Journal of non newtonian fluid Mechanics, Vol. 6, 1-20, 1979
- [92] Molenaar J. M. M., Katgerman L., Kool W. H., Smeulders R. J.; *On the formation of stircast structure*; J. Mat. Sci., 21, pp. 389-394, (1986)
- [93] Moto Mpong S., *Modélisation et simulation numérique du comportement et de l'écoulement d'un métal semi-solide thixotrope*; Rapport de recherche bibliographiques ; CEMEF-Ecole des Mines de Paris ; 1997

- [94] Muttin F., Coupez T., Bellet M., Chenot J.L. *Lagrangian finite element analysis of time dependent viscous free-surface flow using an automatic remeshing technique : application to metal casting flow*; international journal for Numerical Method in Engineering, 36, pp. 2001-2015, (1993)
- [95] Nguyen T. G.; *Modélisation du comportement rhéologique d'alliages à l'état semi-solide*, Thèse de Doctorat INP Grenoble; 1991
- [96] Nguyen T. G. , Favier D., and Suery M. ; *Modeling of thermomechanical behavior of semi-solid metal*, *Constitutive laws for engineering materials*, ASME press, 1991 p.363-365.
- [97] Okano S. ; "*Research Activities in Rheo-Technology Ltd.*" ; The 3<sup>rd</sup> international conference on Semi-solid Processing of Alloys and composites, pp. 7-18 ; 1994
- [98] L. Orgeas, J.-P. Gabathuler, M. Rappaz, and T. Imwinkelried ; *Modelling of semi-solid processing using a temperature-dependent power-law model*, 1999
- [99] Paradies C.J., M. Rappaz, T. Imwinkelried, and J.P. Gabathuler ; *Modelling the rheology of semi-solid metal alloys during die casting*; Presented at the ICMC, welding and advanced solidification process, San Diego, USA, June 8-12, 1998
- [100] Perchat Etienne ; *Mini-élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de stokes 2D. Application au forgeage*; Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris ; (Juillet 2000)
- [101] Peterfi T., Arch. Entwicklungsmech. Organ. 112, 1927
- [102] Pichelin E. ; *Calcul par éléments finis du remplissage 3D pour des fluide visqueux incompressibles. Application à l'injection*; Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris (1998)
- [103] Pittman J. F. T. and Nakazawa S. ; *Finite element analysis of polymer processing operations*; J.F.T. Pittman et al (eds), Numerical analysis of forming processes, Wiley, 165-218 (1984)
- [104] Ponthod J. P., Belytschko T. ; *Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for element-free Galerkin method*; Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 152, pp. 19-46 (1998)
- [105] Rice J. R. ; *On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic deformation in metals*. Journal of applied mechanics, Vol.37,1970, pp. 728-1-371.
- [106] Rudman M. ; *Volume tracking methods for interfacial flow calculations*; International journal for numerical methods in fluids, vol. 24, pp. 671-691 (1997)
- [107] Sagae K., Koizumi M., Yamakawa M. ; *Numerical analysis for polymer melt flow in injection molding*; JSME international journal, vol. 37, n° 3, pp. 531-537 (1994)
- [108] Schreurs P. J. G., Veldpaus F. E., Brekelmans W. A. M. ; *Simulation of forming process using the arbitrary Eulerian-Lagrangian formulation*; Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 58, pp. 19-36 (1986)

- [109] Secondé J.F. et Suery M.; *Effect of solidification conditions on deformation behaviour of semi-solid Sn-Pb alloys*; J. Mat. Science; 1984, Vol 19, pp 3995-4006.
- [110] Secondé J.F.; *Microstructure et rhéologie des alliages Sn-Pb semi-solide*; Doctorat INP Grenoble, 1984
- [111] Shima S. and Oyane M.; *Plasticity theory for porous metals*; Int. J. of Mechanical Science; 1976, Vol 18, pp285-291.
- [112] Simo J.C., Wriggers P., Taylor R.L.; *A perturbed lagrangian formulation for finite element solution of contact problems*; Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 50, 1985, pp. 163-180
- [113] Simo J.C., Laursen T.A.; *An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction*; Computers and structures, 42(1) :97, 116 (1992)
- [114] Smeulders R. J., Mischgofsky F. H. and Frankena H. J.; *Direct microscopy of alloy nucleation, solidification and ageing (coarsening) during stir casting*; J. Crystal Growth, 76, pp. 151-169, (1986)
- [115] Spencer D. B., Mehrabian R., and M.C. Flemings; *Rheological Behavior of Sn-15%Pb in the Crystallization range*; Metallurgical transaction; Volume 3, July-1972; pp. 1925-1932;
- [116] Stoker C., Bay F., Chenot J. L. and Huetink; personal communication (1998)
- [117] Suery M, Martin CL, Salvo L; *Overview of the rheological behaviour of globular and dendritic slurries*; 4<sup>th</sup> international conference on semi-solid processing of alloys and composite; 1996;
- [118] Swaminathan C.R. and Voller V.R.; *A time implicit filling algorithm*; Applied mathematical modeling, vol. 18, pp. 101-108 ( 1994)
- [119] Thompson E.; *Use of pseudo concentrations to follow creeping viscous flows during transient analysis*; International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 6, pp. 749-761 (1986)
- [120] Tome M.F., Duffy B. and Mckee S.; *A numerical technique for solving unsteady non newtonian free surface flows*; Jounal of non newtonian fluid mechanics, vol. 62, pp. 9-34 (1996)
- [121] Toyoshima S and Takahashi Y.; *A numerical simulation of forming process for semi-solid materials*; ISIJ international; vol 31; No 6, pp. 577-582; 1991
- [122] Traoré K.; *Simulation thermomécanique du laminage circulaire. Développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle*; thèse de l'Ecole des Mines de Paris (2001)
- [123] Turng L.S. and Wang K.K., J. Mater. Sci. 26, 2173 (1991)
- [124] Vicente P., *Vers une approche thermomécanique du procédé de fonderie : caractérisation rhéologique et microstructurales d'alliages métalliques à l'état semi-solide*, Thèse ENSMP, 1994
- [125] Vand V.; *Journal of Physical Colloid Chemistry*; Vol 52, pp. 300, (1948)

- [126] Vila Real P.M.M. and Magalhaes Oliveira C.A.; *Use of polynomial functions for hierarchical improvement of finite element solution for transient heat conduction problems with high thermal gradients*; Numerical methods in thermal problems, pp. 227-240 (1989)
- [127] Vogel A., Doherty R. D., and Cantor B.; *Stir-cast microstructure and slow crack growth*; The Metal Society, London, 479, pp. 518-525, (1977)
- [128] Willien J.L.; *Modélisation surfacique du remplissage de moules en injection de thermoplastiques*; Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris (1993)
- [129] Winslow A.M.; *Equipotential zoning of two dimensional meshes*; Lawrence Radiation Laboratory Report, University of California, UCRL-7312 (1963)
- [130] Winslow A. M., Barton R. T.; *Rescaling of equipotential smooting*; Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore (CA), UCI-19486 (1982)
- [131] Wriggers P.; *Finite element algorithms for contact problems*; Computational method in engineering, 21 :1-49, (1995)
- [132] Zaidi K., Abbès B., Teodosiu C.; *Finite element simulation of mold filling using marker particles and the  $k - \epsilon$  model for turbulence*; Computational methods in applied mechanics and engineering, vol. 134, pp. 241-247 (1996)
- [133] Zavaliangos A; Lawley A.; *Numerical simulation of thixoforming*; Journal of materials engineering and performance, 4, pp. 40-47; 1995
- [134] Zhong Zhi-Hua; *On contact-impact problems*; Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations N<sup>o</sup> 178; Linköping (1988)